Erklärungsteil
Mathematikkenntnisse

Hinweis:

In den Lösungen wird immer nur ein Rechenweg für jede Aufgabe verwendet. Häufig sind alternative Rechenwege möglich. Hier wird die pq-Formel verwendet, falls Du lieber mit anderen Formeln wie der Mitternachtsformel rechnest, ist das natürlich auch richtig, nur gilt es das in den Lösungen zu beachten, falls der Rechenweg ein wenig unterschiedlich aussieht.

Hast Du Fragen, oder ist etwas nicht ganz klar in den Erklärungen geschildert?
Dann kannst Du jederzeit in unserem Discord-Channel Deine Fragen stellen. Hier antwortet das PsyCheck-Team und die Community auf all Deine Fragen:

www.psycheck.de/linktree

Interaktive Übersicht

(Durch das Klicken auf ein Lernset, kommst Du direkt zur ersten Seite des Lernsets im Dokument)

Lernset 1

Aufgabe 1

Richtige Lösung: c) $x = -2$

Erklärung:

Die Summe innerhalb der Betragsstriche muss ungeachtet des Vorzeichens 17 ergeben. Demnach gibt es 2 Gleichungen, die sehr einfach zu lösen sind.

$5 = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad x = 3$

$-5 = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad x = -2$

$x = -2$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: a) $x = \frac{10}{3} \cdot y^2 - 4$

Erklärung:

Die Umkehrfunktion zu bilden bedeutet, dass man nach x umstellen muss. Dazu formen wir die Funktion folgendermaßen um:

$y = \sqrt{\frac{3}{10}x + \frac{6}{5}} \quad \rightarrow \; y^2 = \frac{3}{10}x + \frac{6}{5} \quad \rightarrow \; y^2 - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}x \quad \rightarrow \; \frac{10}{3} \cdot y^2 - \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} = x$

$\rightarrow \; \frac{10}{3} \cdot y^2 - 4 = x$

Um die Wurzel loszuwerden, wird zunächst alles quadriert. Dann holen wir $\frac{6}{5}$ durch Subtraktion auf die andere Seite. Und zuletzt wird der Faktor $\frac{3}{10}$ vor x aufgelöst, indem wir mit dem Kehrbruch $\frac{10}{3}$ multiplizieren. Dann muss nur noch vereinfacht werden.

$x = \frac{10}{3} \cdot y^2 - 4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: b) 0,55

Erklärung:

Ort	Park	Fitnessstudio	Café	Σ
Treiben regelmäßig Sport	85	120	125	330
Treiben keinen Sport	45	30	195	270
Σ	130	150	320	600

Für unsere Rechnung sind die grün markierten Zellen in der Tabelle relevant. Um zu berechnen, wie hoch der Anteil derjenigen ist, die regelmäßig Sport treiben, müssen wir die absolute Anzahl derjenigen, die Sport treiben mit der gesamten Anzahl an befragten Personen in Beziehung setzen.

$$\frac{330}{600}$$

Dann muss der Bruch noch so weit wie möglich gekürzt werden.

$$\frac{330}{600} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$$

Jetzt multiplizieren wir noch mal 5, um den Nenner auf 100 zu bringen.

$$\frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{55}{100} = 0{,}55$$

0,55 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: d) Die Geraden sind windschief zueinander.

Erklärung:

Zunächst prüfen wir, ob die beiden Vektoren kollinear, also parallel oder antiparallel sind. Dazu prüfen wir, ob sie ein Vielfaches voneinander sind und erstellen wir für jede Dimension eine einzelne Gleichung

$$\begin{pmatrix} 144 \\ -121 \\ -49 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{12} \\ -\sqrt{11} \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$144 = \gamma \cdot \sqrt{12}$ → $144 = \left(\sqrt{12}\right)^4$ → $\gamma = \frac{\left(\sqrt{12}\right)^4}{\sqrt{12}} = \left(\sqrt{12}\right)^3$

$-121 = \gamma \cdot -\sqrt{11}$ → $-121 = -\left(\sqrt{11}\right)^4$ → $\gamma = \frac{\left(\sqrt{11}\right)^4}{\sqrt{11}} = \left(\sqrt{11}\right)^3$

$-49 = \gamma \cdot -\sqrt{7}$

$\left(\sqrt{11}\right)^3 \neq \left(\sqrt{12}\right)^3$

Die Werte für den Skalar γ sind nicht gleich, daher handelt es sich nicht um kollineare Vektoren.

Nun müssen wir noch prüfen, ob sie orthogonal zueinander sind. Dazu bilden wir das Skalarprodukt und setzen es $= 0$, da das die Bedingung für orthogonale Vektoren ist.

$$144 \cdot \sqrt{12} - 121 \cdot -\sqrt{11} - 49 \cdot -\sqrt{7} = 144 \cdot \sqrt{12} + 121 \cdot \sqrt{11} + 49 \cdot \sqrt{7} > 0$$

Dieses Skalarprodukt kann definitiv nicht 0 werden und somit können wir auch ausschließen, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind. Daher ist die richtige Antwort, dass sie windschief zueinander sind.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: b) $(9{,}6{,}0)$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf einer Ebene liegt, macht es Sinn diese zunächst einmal in die Koordinatenform zu übertragen, da wir dann die Punkte ganz einfach einsetzen können. Dazu bilden wir mithilfe der beiden Richtungsvektoren der Ebene den Normalenvektor und stellen damit die Koordinatenform auf. Dann setzen wir die Punkte nach und nach ein und überprüfen so, ob sie auf der Ebene liegen.

Schritt 1: Koordinatenform aufstellen:

$$E_1: \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt bilden:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 3 + 2 \\ -6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen:

$-3x + 5y - 6z = ?$

$-3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot -1 = -3 + 6 = 3$

$-3x + 5y - 6z = 3$

Schritt 2: Punkte einsetzen und prüfen:

b)

$-3 \cdot 9 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 0 = -27 + 30 = 3$

Der Punkt $(9{,}6{,}0)$ liegt auf der Ebene E_1.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: d) $x = \frac{1}{3}$

Erklärung:

Solche Aufgaben können einen schnell aus dem Konzept bringen, aber keine Sorge, sie sind einfacher als es aussieht. Hier musst Du den Term Schritt für Schritt vereinfachen. Und anschließend wird nach x umgestellt.

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgendes Wissen über den $\ln()$:

$\ln(e^a) = a$

$e^{\ln(a)} = a$

$\frac{\ln(e^{3x}) \cdot (\sqrt{81} - x^2)}{9x \cdot x^{-1} - \sqrt{x^4}} = 1$ → $\frac{3x \cdot (\sqrt{81} - x^2)}{9x \cdot x^{-1} - \sqrt{x^4}} = 1$

x^{-1} ist dasselbe wie $\frac{1}{x}$ → Also wird $9x \cdot x^{-1}$ zu $9x \cdot \frac{1}{x}$ → x wegkürzen: $9x \cdot \frac{1}{x} = 9$

$\frac{3x \cdot (\sqrt{81} - x^2)}{9x \cdot x^{-1} - \sqrt{x^4}} = 1$ → $\frac{3x \cdot (\sqrt{81} - x^2)}{9 - \sqrt{x^4}} = 1$

$\sqrt{81} = 9$

$\frac{3x \cdot (\sqrt{81} - x^2)}{9 - \sqrt{x^4}} = 1$ → $\frac{3x \cdot (9 - x^2)}{9 - \sqrt{x^4}} = 1$

$\sqrt{x^4} = x^2$

$\frac{3x \cdot (9 - x^2)}{9 - x^2} = 1$ → $\frac{3x \cdot (9 - x^2)}{9 - x^2} = 1$

Hier ist zu erkennen, dass oben als auch unten im Bruch 9 – x steht. Somit kann das gekürzt werden. Und dann nach x umstellen.

$\frac{3x \cdot (9 - x^2)}{9 - x^2} = 1$ → $3x = 1$ → $x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: b) $x = \frac{5}{6}$

Erklärung:

Die Brüche müssen zunächst gekürzt und dann auf denselben Nenner gebracht werden, damit sie addiert werden können.

$$x = \sqrt{\frac{6}{24} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 9} + \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{16}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$x = \frac{5}{6}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: a) $\left(58, -\frac{35}{2}, 23\right)$

Erklärung:

Um den Mittelpunkt der Strecke zwischen A und B zu ermitteln, müssen wir zunächst die Strecke $\overrightarrow{AB}$ berechnen und dann diesen Vektor mit $\frac{1}{2}$ multipliziert zu Punkt A dazu addieren.

Schritt 1: Strecke $\overrightarrow{AB}$ bilden:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 27 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 89 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 - 89 \\ -13 + 22 \\ 4 - 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62 \\ 9 \\ -38 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Stützvektor Punkt A mit $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ addieren:

$$\begin{pmatrix} 89 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -62 \\ 9 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -31 \\ 4{,}5 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 - 31 \\ -22 + 4{,}5 \\ 42 - 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 17{,}5 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Die richtige Lösung ist $\left(58, -\frac{35}{2}, 23\right)$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: b) 56

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge nicht beachtet wird, wobei Wiederholung nicht stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Kombination ohne Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ → Binomialkoeffizient

Hier gilt: $n = 8$ und $k = 3$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{56 \cdot 6}{6} = 56$

56 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: b) 6

Erklärung:

Die verbal formulierte Gleichung gilt es hier zunächst einmal aufzuschreiben und dann nach x umzustellen:

$$\frac{x^2}{108} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x^3}{108} = 2$$

$$x^3 = 216$$

$$x = \sqrt[3]{216} = 6$$

Die richtige Antwort ist 6.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: b) $\ln(e^0) = 1$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, ist es wichtig zu wissen, dass $\ln(1) = 0$ gilt.

Wenn wir etwas hoch 0 rechnen, wird es immer 1. So auch hier e^0. Demnach rechnen wir folgendermaßen:

$$\ln(e^0) = \ln(1) = 0$$

Aufgabe 12

Richtige Lösung: c) 65

Erklärung:

Hier kann es helfen sich die gegebenen Punkte in einer kurzen Skizze einzuzeichnen. Allerdings kann man auch die Werte und Länge der Kanten anhand der Punkte ablesen.

Wir sehen, dass Punkt A und C denselben y-Wert haben und sich nur im x-Wert unterscheiden. Das lässt darauf schließen, dass diese die Grundseite des Dreiecks bilden. Die Differenz der x-Werte beträgt 10, was bedeutet, dass die Grundseite 10 Längeneinheiten lang ist.

Folglich ist Punkt B die Spitze des Dreiecks und hat eine Differenz in der Höhe von 13 Längeneinheiten im Vergleich mit beiden anderen Punkten. Somit wissen wir, dass die Höhe des Dreiecks 13 beträgt.

Nun müssen wir nur noch in die Formel zu Berechnung der Fläche eines Dreiecks einsetzen:

$$Fläche = \frac{1}{2} \cdot Höhe \cdot Grundseite = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$$

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) 40.320

Erklärung:

Hier liegt eine Verkettung (Permutation) vor. Um diese Verkettung von Möglichkeiten zu berechnen, muss man $n!$ ausrechnen. Hier ist $n = 8$. Zu Beginn gibt es 8 mögliche Farben, die als erstes genutzt werden können. Danach gibt es 7 mögliche Farben, die als zweites genutzt werden können und so weiter. Die Berechnung sieht folgendermaßen aus:
$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$
40.320 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: c) $\frac{17}{125}$

Erklärung:

Da die Kugeln zurückgelegt werden, ändert sich die Gesamtmenge der Kugeln nicht.

Es gibt 3 verschiedene Möglichkeiten, dass alle drei Kugeln dieselbe Farben haben. Sie können alle rot, grün oder blau sein. Die Wahrscheinlichkeiten dafür sind folgendermaßen:

Alle Kugeln sind rot: $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{64}{1.000} = \frac{8}{125}$

Alle Kugeln sind grün: $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{64}{1.000} = \frac{8}{125}$

Alle Kugeln sind blau: $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit für das dreimalige Ziehen derselben Farbe:

$$\frac{8}{125} + \frac{8}{125} + \frac{1}{125} = \frac{8+8+1}{125} = \frac{17}{125}$$

$\frac{17}{125}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: b) 3

Erklärung:

$$0{,}875 = \frac{7}{8}$$

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{7}{8} \quad |-1$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq -\frac{1}{8} \quad |\cdot -1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{8} \qquad \left|\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)\right. \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$3 \leq n$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Erklärung:

Im Idealfall bist Du schon mit der Funktion von $f(x) = \frac{1}{x}$, denn diese Funktion ist recht einzigartig und es gibt wenig ähnliche Funktionen. Falls Du noch unsicher bist beim Analysieren solcher Graphen ist der sicherste Weg anhand von Rechenregeln und dem Einsetzen von Punkten Antwortmöglichkeiten auszuschließen.

Z.B. können wir hier d) schnell ausschließen, weil wir wissen, dass $\sqrt{x}$ nicht für negative Werte definiert ist.

Antwortmöglichkeit a) kann auch schnell ausgeschlossen werden. Setzt man einige beliebige Werte für x ein, merkt man schnell, dass immer dasselbe Ergebnis kommt, und zwar 1. Egal hoch was wir 1 nehmen, es bleibt immer 1.

Um jetzt noch b) und c) voneinander zu unterscheiden, setzen wir $x = 1$ ein.

b): $f(x) = 3(1)^{-1} = 3$

c): $f(x) = \frac{1}{1} = 1$

Nun können wir auch b) ausschließen, da der Graph ganz sicher nicht durch den Punkt (1|3) verläuft.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: c) 1,7

Erklärung:

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streubreite eines Wertes um den Durchschnitt herum. Während die Varianz die quadrierte Streuung von Werten um den Durchschnitt herum berechnet, berechnet man mit der Standardabweichung die einfache Streuung. Daher ziehen wir die Wurzel der Varianz, um die Standardabweichung zu berechnen. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$Var(x) = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

Und die Formel zur Berechnung der Standardabweichung ist demnach:

$$Std(x) = \sqrt{Var(x)}$$

Zunächst einmal berechnen wir den Durchschnittswert und beim Würfel entspricht das der Summe aller Augenzahlen durch 6.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{18}{6} + \frac{3}{6} = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$$

$$Var(x) = \frac{(1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2}{6}$$

$$Var(x) = \frac{(-2{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (2{,}5)^2}{6}$$

$$Var(x) = \frac{2 \cdot (0{,}5)^2 + 2 \cdot (1{,}5)^2 + 2 \cdot (2{,}5)^2}{6} = \frac{2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 2{,}25 + 2 \cdot 6{,}25}{6} =$$

$$Var(x) = \frac{2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 2{,}25 + 2 \cdot 6{,}25}{6} = \frac{0{,}5 + 4{,}5 + 12{,}5}{6} = \frac{17{,}5}{6}$$

$$Var(x) = \frac{17{,}5}{6} \approx \frac{18}{6} = 3$$

$Std(x) \approx \sqrt{3} \approx 1{,}7$

Aufgabe 18

Richtige Lösung: a) $= x^2 - 4$

Erklärung:

$f(g(x)) = (x-2) \cdot \big((x-2)+4\big) = (x-2) \cdot (x-2+4) = (x-2) \cdot (x+2)$

$= x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$ → 3. Binomische Formel

$= x^2 - 4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: c) $z = 1$

Erklärung:

Bei einer solchen Aufgabe versuchen wir nach und nach Variablen zu eliminieren, bis wir den Wert der gesuchten Variable erhalten.

I. $-2z - 4y = 4w + 4$
II. $14 + 9x = -7y$
III. $4z - 2y = 8w + 4$
IV. $-10y = 14z + 6$

Wir nutzen das Additionsverfahren und multiplizieren I. mit -2 bevor wir diese Gleichung mit IV. addieren. Das Ergebnis, die Gleichung V. stellen wir nach z um und setzen in IV. ein. So erhalten wir den Wert von y, den wir nur noch einsetzen müssen, um z zu berechnen.

Schritt 1: -2·I. + III. = V.:

-2·I.: $4z + 8y = -8w - 8$

III.: $4z - 2y = 8w + 4$

V.: $8z + 6y = -4$

Schritt 2: V. nach z umstellen und in IV einsetzen:

V.: $8z + 6y = -4$

$8z = -4 - 6y$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y$

IV.: $-10y = 14z + 6$

$-10y = 14 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y\right) + 6$

$-10y = -7 - 10{,}5y + 6$

$0{,}5y = -1$

$y = -2$

Schritt 3: Den Wert von y einsetzen:

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}y$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot (-2)$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$z = 1$$

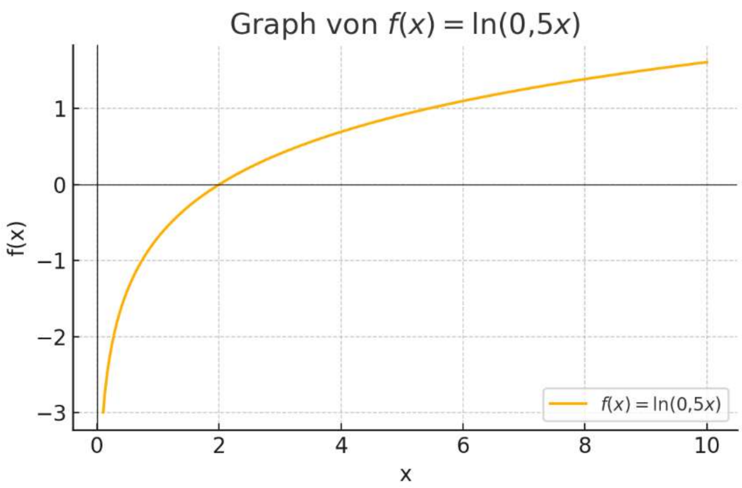
Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) Keine der oberen Aussagen ist korrekt.

Erklärung:

Zunächst formen wir den Ausdruck $\ln(0{,}5x)$ um zu $\ln(0{,}5) + \ln(x)$

$\ln(0{,}5x)$ entspricht einer Zahl, und zwar ca. $-0{,}7$



Nun schauen wir uns die einzelnen Aussagen separat an.

a)

Die Behauptung, dass der ln bei $x = 1$ einen Extrempunkt hat, kann rechnerisch geprüft werden, oder durch Kenntnisse erschlossen werden.

Wer sich ein wenig mit Logarithmen auskennt, weiß, dass der $ln(1) = 0$ ist, er jedoch durchaus positive Werte annimmt, weshalb auszuschließen ist, dass hier ein Extrempunkt vorliegt.

Wollen wir es rechnerisch beweisen, müssen wir lediglich die erste Ableitung berechnen und für x=1 einsetzen. Sofern die Steigung hier nicht 0 ist, liegt kein Extrempunkt vor.

$$f(x) = \ln(x) + \ln(0,5)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

Es liegt also ganz sicher kein Extrempunkt vor.

b)

Um herauszufinden, bei welchem x-Wert die Funktion die X-Achse schneidet, müssen wir sie einfach $= 0$ setzen.

$$\ln(x) + \ln(0,5) = 0 \qquad |-\ln(0,5)$$

$$\ln(x) = -\ln(0,5)$$

$$\ln(x) = (-1) \cdot \ln(0,5) \qquad |e^{()}$$

$$e^{\ln(x)} = e^{(-1)\cdot\ln(0,5)}$$

$$x = e^{(-1)} \cdot e^{\ln(0,5)}$$

$$x = \frac{1}{e} \cdot 0,5 = \frac{1}{2e} \neq e$$

Die Funktion schneidet die X − Achse bei $x = 1$ und daher nicht bei $x = e$.

c)

Hier müssen wir einsetzen und Logarithmusgesetze anwenden.

Wir setzen den $x = e^2$ in die Funktion ein und überprüfen das Ergebnis.

$$f(e^2) = \ln(e^2) + \ln(0,5) = 2 \cdot \ln(e) + \ln(0,5) = 2 \cdot 1 - 0,7 = 1,3$$

Demnach ist auch c) nicht richtig.

d) ist die richtige Antwort.

Lernset 2

Aufgabe 1

Richtige Lösung: a) 7,6

Erklärung:

Die Dichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit einer Variable an, wobei es sich um eine stetige Variable handelt. Daher ist die Dichtefunktion integrierbar.

Wir wollen die gesamte Nutzung des Kaffeautomaten anhand dieser Dichtefunktion berechnen. Dazu bilden wir das Integral, welches die sogenannte Verteilungsfunktion darstellt.

$$f(x) = \begin{cases} 15 - 1{,}2x^2 & 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 15x - 0{,}4x^3 & 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Jetzt müssen wir nur noch die korrekten x-Werte einsetzen. Die Dichtefunktion beschreibt die Nutzung über den achtstündigen Arbeitstag hinweg und daher ist die Funktion auf $0 \leq x \leq 8$ beschränkt.

Uns interessiert der Verbrauch zwischen der 2. und der 4. Arbeitsstunde also von $x = 2$ bis $x = 4$. Demnach setzen wir diese Werte in das Integral ein und rechnen die gesamte Nutzung aus.

$$\int_0^3 (15 - 1{,}2x^2)dx = [15x - 0{,}4x^3]_2^4 = (15 \cdot 4 - 0{,}4 \cdot 4^3) - (15 \cdot 2 - 0{,}4 \cdot 2^3)$$

$$= (60 - 0{,}4 \cdot 64) - (30 - 0{,}4 \cdot 8) = (60 - 25{,}6) - (30 - 3{,}2)$$

$$= 34{,}4 - 26{,}8 = 7{,}6$$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: c) 4,0

Erklärung:

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung von Werten. Je höher, desto größer die Streuung. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

Demnach berechnen wir immer zuerst den Durchschnittswert ($\bar{x}$) und anschließend die Varianz.

Unternehmensnummer	1	2	3	4	5
Arbeitnehmerzahl	5	3	6	7	9

$$\bar{x} = \frac{5+3+6+7+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$Var(x) = \frac{(5-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + (9-6)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{(-1)^2 + (-3)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (3)^2}{5} = \frac{1+9+0+1+9}{5} = \frac{20}{5}$$

$$Var(x) = 4$$

Die Varianz der Arbeitnehmerzahl beträgt 4.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: b) $f(y) = 9y^2 - 12y + 3$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, musst Du für x einsetzen und vereinfachen.

$$f(y) = \left(3 \cdot \left(y - \tfrac{2}{3}\right)\right)^2 - 1 = \left(3 \cdot y - 3 \cdot \tfrac{2}{3}\right)^2 - 1 = (3y-2)^2 - 1$$

→ 2. Binomische Formel

$$= 9y^2 - 12y + 4 - 1 = 9y^2 - 12y + 3$$

$f(y) = 9y^2 - 12y + 3$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: b) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x + C$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man entweder die gegebene Funktion integrieren oder die Stammfunktionen in den Antwortmöglichkeiten ableiten, wobei es sich hier empfiehlt, zu integrieren.

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$

$F(x) = \frac{2}{3+1} \cdot x^{3+1} - \frac{6}{2+1} \cdot x^{2+1} + 4 \cdot x^{0+1} = \frac{2}{4} \cdot x^4 - \frac{6}{3} \cdot x^3 + 4 \cdot x^1 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x$

Zuletzt muss noch die Konstante C addiert werden, da es sich um ein unbestimmtes Integral handelt.

$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4x + C$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: d) $x = 0$

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, brauchst Du folgendes Potenzgesetz:

$a^0 = 1$

$f(x) = 1 = \frac{e^x}{1+x^4}$ $\quad |\cdot (1 + x^4)$

$1 + x^4 = e^x$ → Ab hier muss man einsetzen, es sei denn, man weiß, dass $e^0 = 1$ ist.

$1 + (0)^4 = e^0$

$1 = 1$ → $f(0) = 1$

$x = 0$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: a) 8,8

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man in möglichst kurzer Zeit möglichst präzise schätzen, was die richtige Antwort ist. Die Wurzel ohne Taschenrechner zu berechnen ist unrealistisch. Daher müssen wir mithilfe von Annäherungen arbeiten.

Hier quadrieren wir 9 als erstes, da es die Obergrenze der Antwortmöglichkeiten ist und es sich mit ganzen Zahlen am besten rechnen lässt.

$9 \cdot 9 = 81 > 78$

Wir können also schon mal ausschließen, dass das Ergebnis 9 ist.

Als nächstes quadrieren wir 8,5 approximativ. Zahlen, die auf ,5 enden können wir sehr gut approximativ quadrieren, indem wir die nächste ganze Zahl darüber und darunter miteinander multiplizieren.

In diesem Fall: $8 \cdot 9 = 72$. Das Ergebnis ist deutlich unter 78, was bedeutet, dass unsere gesuchte Zahl über 8,5 liegen muss.

Es wird höchstwahrscheinlich 8,9 sein, oder 8,8. Da das Quadrat von 9 nahe an der gesuchten Zahl liegt, nehmen wir 8,9 und versuchen diese Zahl zu quadrieren:

$$8{,}9 \cdot 8{,}9 = \frac{89 \cdot 89}{100} = \frac{80 \cdot 80 + 80 \cdot 9 \cdot 2 + 9 \cdot 9}{100} = \frac{6.400 + 1.440 + 81}{100} = \frac{7.921}{100} = 79{,}21$$

Da das Ergebnis nicht ganz eindeutig ist, wiederholen wir das Ganze mit 8,8.

$$8{,}8 \cdot 8{,}8 = \frac{88 \cdot 88}{100} = \frac{80 \cdot 80 + 80 \cdot 8 \cdot 2 + 8 \cdot 8}{100} = \frac{6.400 + 1.280 + 64}{100} = \frac{7.744}{100} = 77{,}44$$

Hier liegt 8,8 klar näher an $\sqrt{78}$ als 8,9. Für gewöhnlich muss man bei diesem Aufgabentypen nicht so viele präzise Berechnungen anstellen, allerdings kann es durchaus vorkommen.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: b) $x_w = -\frac{1}{2}$

Erklärung:

Um herauszufinden, wo die Funktion ihre Wendestelle hat, müssen wir die 2. Ableitung errechnen:

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 1$

$f''(x) = 12x + 6$

Jetzt müssen wir die 2. Ableitung $= 0$ setzen und x ausrechnen.

$f''(x) = 12x + 6 = 0$

$12x + 6 = 0 \qquad |-6$

$12x = -6 \qquad |\div 12$

$$x_w = -\frac{1}{2}$$

$x_w = -\frac{1}{2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: a) $2x + 2y + 10z = 166$

Erklärung:

Hier müssen wir zunächst die Ebene in Parameterform aufstellen und dann den Normalenvektor berechnen, um mithilfe dessen die Koordinatenform der Ebene zu bestimmen.

Wir nehmen an, dass A unser Stützvektor ist. Demnach sind die Richtungs- bzw. Spannvektoren der Ebene $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Dann berechnen wir das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren um mithilfe dessen die Koordinatenform aufzustellen.

Schritt 1: Parameterform aufstellen:

Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parameterform:

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Koordinatenform aufstellen:

Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ 2 - 0 \\ 6 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen und Stützvektor einsetzen:

$2x + 2y + 10z = ?$

$2 \cdot 17 + 2 \cdot 1 + 10 \cdot 13 = 34 + 2 + 130 = 166$

$2x + 2y + 10z = 166$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: a) $\vec{v} = \binom{0}{-2} + t \cdot \binom{4}{3}$

Erklärung:

Um eine Funktionsgleichung in Vektorenschreibweise zu übersetzen, müssen wir zunächst anhand der Steigung den Richtungsvektor bestimmen und anschließend anhand der Konstante in der Funktionsgleichung den Stützvektor der Geraden.

Steigung:

Die Steigung beträgt gemäß der Funktionsgleichung $\frac{3}{4}$. Das bedeutet, wenn x um 4 Einheiten steigt, steigt y um 3 Einheiten. In Vektorenschreibweise drücken wir das so aus:

$\binom{4}{3}$

Stützvektor:

Setzen wir in die Funktionsgleichung für $x = 0$ ein, erhalten wir einen Punkt, der auf der Geraden liegt. Diesen übersetzen wir in die Vektorenschreibweise und erhalten so unsere fertige Gerade.

$$y = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2$$

Stützvektor: $\binom{0}{-2}$

Die Gerade: $\vec{v} = \binom{0}{-2} + t \cdot \binom{4}{3}$

Aufgabe 10

Richtige Lösung: c) 10.000

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge beachtet werden muss, wobei Wiederholung stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Variation mit Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: n^k

Hier gilt: $n = 10$ und $k = 4$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

10.000 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: c) 1.728 cm^3

Erklärung:

Formel: $Volumen = (Kantenlänge)^3$

$Volumen = 12^3 = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 144 \cdot 12 = 1.728$

1.728 cm^3 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: b) $\frac{2}{9}$

Erklärung:

Es gibt zwei Farben, die in beiden Urnen vorhanden sind, pink und braun.

Es gibt demnach 2 Szenarien, in denen gleichfarbige Kugeln gezogen werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Urne eine bestimmte Farbe gezogen wird ist hier immer $\frac{1}{3}$, da es in keiner Urne eine Farbe mehrfach gibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass aus beiden Urnen eine pinke Kugel gezogen wird, beträgt demnach: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Da wir zwei Farben haben, die in beiden Urnen vorhanden sind, gibt es dieses mögliche Szenario für beide Farben, weshalb die Wahrscheinlichkeit $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ entspricht.

$\frac{2}{9}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) $\frac{4}{25}$

Erklärung:

Es sind genau 7 Zahlen bis 30 durch 4 teilbar (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28). Durch 5 sind genau 6 Zahlen bis 30 teilbar (5, 10, 15, 20, 25, 30).

Es gibt eine Zahl (20), die durch beide Zahlen teilbar ist, deshalb ist die Gesamtanzahl an Zahlen bis 30, die durch 4 oder 5 teilbar sind, $7 + 6 - 1 = 12$.

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 30 Karten durch 4 oder 5 teilbar ist, beträgt $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

Zieht man 2 Karten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide durch 4 oder 5 teilbar sind, $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

$\frac{4}{25}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: d) $89{,}6\%$

Erklärung:

Hier muss mit der Gegenwahrscheinlichkeit gearbeitet werden. Wir rechnen 1- (die Wahrscheinlichkeit, dass kein Programm die Bedrohung erkennt) - (die Wahrscheinlichkeit, dass nur ein Programm die Bedrohung erkennt).

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Programm die Bedrohung erkennt, wird folgendermaßen berechnet:

$$(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}8)=0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2=\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{8}{1.000}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nur ein Programm die Bedrohung erkennt, wird folgendermaßen berechnet:

$$(1-0{,}8)\cdot(1-0{,}8)\cdot0{,}8=0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}8=\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{32}{1.000}$$

Da es drei mögliche Reihenfolgen gibt, dass nur ein Programm funktioniert, müssen wir das noch mit 3 multiplizieren:

$$\frac{32}{1.000}\cdot3=\frac{96}{1.000}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Programme die Bedrohung erkennen, wird folgendermaßen berechnet:

$$1-\left(\frac{96}{1.000}+\frac{8}{1.000}\right)=1-\left(\frac{104}{1.000}\right)=1-\left(\frac{10{,}4}{100}\right)=\frac{89{,}6}{100}=89{,}6\%$$

$89{,}6\%$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: d) $(1{,}1)$

Erklärung:

Um den Schnittpunkt herauszufinden, muss man zunächst die beiden Funktionen miteinander gleichsetzen und nach x auflösen.

$\sqrt{x}=2-\sqrt{x} \qquad |+\sqrt{x}$

$2\cdot\sqrt{x}=2 \qquad |\div 2$

$\sqrt{x}=1 \qquad |()^2$

$x=\pm1$

Wir haben 2 mögliche x-Werte. Allerfings kann $x = -1$ nicht in die Funktionen eingesetzt werden, da man keine Wurzel von negativen Zahlen ziehen kann. Demnach ist $x = 1$ der einzige Schnittpunkt. Jetzt fehlt nur noch die y-Koordinate. Um die herauszufinden, setzen wir den x-Wert in eine der beiden Funktionen ein.

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

Somit sind die Koordinaten des Schnittpunktes $(1{,}1)$.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: a) x^{-1}

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Potenzgesetze:

$a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$

$a^b \cdot a^{-c} = a^{(b-c)}$

$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$

$$\frac{(x^3 \cdot x^{-9})^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x^{-4}}}{x^3} = \frac{(x^{3-9})^{\frac{1}{3}} \cdot x^4}{x^3} = \frac{x^{-6 \cdot \frac{1}{3}} \cdot x^4}{x^3} = \frac{x^{-2} \cdot x^4}{x^3}$$

$$= x^{-2} \cdot x^4 \cdot x^{-3} = x^{-2+4-3} = x^{-1}$$

Aufgabe 17

Richtige Lösung: b) 3

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgendes Wissen über den $\ln()$:

$e^{\ln(a)} = a$

$\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$

Und folgendes Wurzelgesetz:

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\ln(e^5)}{2\cdot\ln(e)}+\ln(\sqrt{e})=\frac{5\cdot\ln(e)}{2\cdot\ln(e)}+\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\ln(e)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Aufgabe 18

Richtige Lösung: d) 9

Erklärung:

Vektor zwischen den zwei Punkten:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{pmatrix}-13-(-7)\\ 6-12\\ 4-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -6\\ -3\end{pmatrix}$$

Länge des Vektors:

$$\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}=9$$

9 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: d) $x+2$

Erklärung:
Wir müssen den Ausdruck im Zähler des Bruchs faktorisieren, um den Bruch zu vereinfachen. Hier liegt die 3. Binomische Formel vor:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}=(x+2)=x+2$$

$x+2$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: b) $\frac{7x-14}{(x-4)^2}$

Erklärung:

Wir wollen beide Brüche auf den selben Nenner bringen, um sie miteinander verrechnen zu können.

$$\frac{7}{x-4}+\frac{14}{(x-4)^2}=\frac{7\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x-4)}+\frac{14}{(x-4)^2}=\frac{7\cdot(x-4)}{(x-4)^2}+\frac{14}{(x-4)^2}=\frac{7\cdot(x-4)+14}{(x-4)^2}$$

$$=\frac{7x-28+14}{(x-4)^2}=\frac{7x-14}{(x-4)^2}$$

Lernset 3

Aufgabe 1

Richtige Lösung: b) 83 %

Erklärung:

Diese Aufgabe dreht sich um bedingte Wahrscheinlichkeit, was man daran erkennen kann, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen einer Klausur mit dem Lernverhalten der Person ändert.

B bedeutet bestanden und $\overline{B}$ bedeutet nicht bestanden.

L bedeutet, dass der Student gelernt hat und $\overline{L}$ bedeutet, dass der Student nicht gelernt hat.

Gegeben ist folgendes:

$P(\overline{L}|\overline{B}) = 0{,}75$

$P(L) = \frac{210}{300} = \frac{70}{100} = 0{,}7$

$P(\overline{L}) = \frac{90}{300} = 0{,}3$

$P(\overline{B}) = \frac{1}{3}$

Wir suchen: $P(\overline{B}|\overline{L})$

Bayes-Regel:

$$P(\overline{B}|\overline{L}) = \frac{P(\overline{L}|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{L})}$$

Da wir alle Werte bereits in der Aufgabenstellung gegeben haben, brauchen wir nur noch einsetzen.

$$P(\overline{B}|\overline{L}) = \frac{P(\overline{L}|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{L})} = \frac{0{,}75 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}3} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{10}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Um eine Prozentzahl zu approximieren, versuchen wir den Nenner so nah an 100 zu bringen wie möglich:

$$P(\overline{B}|\overline{L}) = \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 16{,}5}{6 \cdot 16{,}5} = \frac{50 + 30 + 2{,}5}{60 + 36 + 3} = \frac{82{,}5}{99} \approx 83\%$$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: c) $k = -3$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zunächst die Bedingung aufstellen und dann die Variable k berechnen.

Die Bedingung erhalten wir, indem wir die zweite Ableitung $= 0$ setzen und den gegebenen x-Wert einsetzen, da wir eine Wendestelle suchen.

$f(x) = x^3 + kx^2 - 12x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2kx - 12$

$f''(x) = 6x + 2k$

$f''(1) = 6 \cdot 1 + 2k = 0 \qquad |-6$

$2k = -6 \qquad |\div 2$

$k = -3$

$k = -3$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: d) 11 Monate und 26 Tage

Erklärung:

Zunächst müssen wir die Monate in Tage umrechnen. Da alle Monate genau 30 Tage lang sind, multiplizieren wir dazu einfach mit 30:

Kind 1: $8 \cdot 30 + 12 = 252$
Kind 2: $12 \cdot 30 + 10 = 370$
Kind 3: $14 \cdot 30 + 4 = 424$
Kind 4: $13 \cdot 30 + 1 = 391$
Kind 5: $11 \cdot 30 + 13 = 343$

Summe: 1.780

Nun teilen wir die Summe durch 5 und müssen dann nur noch in Monate mit Resttagen umrechnen:

$$\frac{1.780}{5} = 356$$

$$\frac{356}{30} = 11 + \frac{26}{30}$$

Das entspricht einem Mittelwert bzw. einem arithmetischen Mittel von 11 Monaten und 26 Tagen.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: a) Graph A

Erklärung:

Die vorliegende Funktion bildet eine Parabel ab. Das liegt an dem quadrierten x.
Bei einer solchen Parabel gibt es 3 Kriterien, mit denen wir sicher zum richtigen Ergebnis kommen.

1. Den Y-Achsen-Schnittpunkt
2. Ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist
3. Ob die Parabel auf der X-Achse nach links oder rechts verschoben ist

Wir prüfen zunächst, ob wir mithilfe des Y-Achsen-Schnittpunktes bereits Antwortmöglichkeiten ausschließen können.
Dazu setzen wir $x = 0$ ein und vergleichen mit den Graphen.

$$f(0) = (0 - 2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

Somit können wir bereits Antwortmöglichkeit b) und d) ausschließen.

Die beiden übrigen Graphen zeigen beide eine nach oben geöffnete Parabel, weshalb uns dieses Kriterium keinen weiteren Ausschluss ermöglicht.

Demnach müssen wir prüfen, inwiefern die Parabel auf der X-Achse verschoben ist.

$$f(x) = (x - 2)^2 + 4$$

Da in der Klammer eine 2 subtrahiert wird, wissen wir, dass die Parabel auf der X-Achse nach rechts verschoben ist. Somit können wir auch Antwortmöglichkeit c) ausschließen.

Graph A ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: a) Die Geraden sind orthogonal zueinander.

Erklärung:

Bei diesen Vektoren kann man schon anhand eines Blicks auf die einzelnen Vorzeichen ausschließen, dass es sich um kollineare Vektoren handelt, da bei den oberen beiden Zahlen die Vorzeichen getauscht werden, bei der untersten Zeile aber gleich bleiben. Somit können die Lagebeziehungen parallel und antiparallel ausgeschlossen werden.

Daher prüfen wir, ob die Vektoren orthogonal zueinander sind. Dazu bilden wir das Skalarprodukt. Wenn dieses 0 ergibt, sind die Vektoren orthogonal zueinander.

$34 \cdot (-2) - 47 \cdot 11 + 65 \cdot 9 = -68 - 517 + 585 = -585 + 585 = 0$

Das Skalarprodukt ergibt 0. Somit sind die Vektoren orthogonal zueinander.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: d) $= \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-x\right)\cdot e^{1-x}}{4}$

Erklärung:

$f(x) = \frac{\ln(x)}{2} \cdot \frac{x}{e^{-1}}$

$g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$

Zum Lösen dieser Aufgabe benötigen wir die folgenden Rechengesetze:

$\ln e^{a} = a$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\frac{1}{x^{-a}} = x^{a}$

$$f(g(x)) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)}{e^{-1}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(e^{-x})}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}e^{-x}\right)}{e^{-1}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) - x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}e^{-x}\right) \cdot e^{1}$$

$$f(g(x)) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) - x}{2} \cdot \frac{e^{-x} \cdot e^{1}}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) - x}{2} \cdot \frac{e^{1-x}}{2} = \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) \cdot e^{1-x}}{4}$$

$= \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-x\right)\cdot e^{1-x}}{4}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: a) $f(x) = \ln|7x^2 - 4| + e^{-x}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, musst Du folgende Ableitungsregeln kennen:

- $f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = e^{-a} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -e^{-a}$
- Kettenregel

b) kann auf den ersten Blick ausgeschlossen werden, da es die zweite Ableitung der Funktion ist.

c) kann ausgeschlossen werden, da $f(x) = \ln\left(e^{-(7x^2-4)}\right) = -7x^2 + 4$, da sich $\ln$ und e gegenseitig aufheben.

d) kann ausgeschlossen werde, da beim Ableiten hier die Produktregel angewendet werden müsste und dabei würde der $\ln$ so mindestens einmal in der Ableitung stehen, was er aber laut Aufgabenstellung nicht tut.

Rechnerisch wird die Aufgabe folgendermaßen gelöst:

Wir sehen, dass im Zähler des Bruches die Ableitung des Terms im Nenner steht. Das ist typisch, für eine abgeleitete Funktion, die im ln steht, da aufgrund der Kettenregel folgendermaßen gerechnet wird:

$g(x) = \ln(f(x))$

$g'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)}$

Wenn wir allerdings integrieren, sodass der ln rauskommt, müssen wir Betragsstriche verwenden, da wir das Vorzeichen nicht kennen.

$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\int g(x) = \ln|f(x)|$

Demnach wissen wir, dass abgesehen vom e^{-x} folgendes gilt:

$f(x) = 7x^2 - 4$

$f'(x) = 14x$

Nun noch der e^{-x}-Term:

$g(x) = e^{-a}$

$g'(x) = -e^{-a}$

Wenn die Ableitung $+e^{-x}$ lautet, muss dementsprechend die Ursprungsfunktion $-e^{-x}$ lauten.

Die richtige Lösung ist demnach:

$F'(x) = f(x) = \ln|7x^2 - 4| + e^{-x}$

Aufgabe 8

Richtige Lösung: c) $(1,0,2)$

Erklärung:

Um zu berechnen, in welchem Punkt die Gerade die Ebene schneidet, müssen wir die Gerade in die Koordinatenform der Ebene einsetzen. Da wir nur einen Parameter in der Geraden haben, können wir danach auflösen und anschließen in die Parameterform der Gerade einsetzen, um den Punkt zu berechnen.

Schritt 1: Gerade in Ebene einsetzen:

$E_1: 2x - y + z = 4$ $\qquad\qquad$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2 \cdot (1 + 3r) - 1 \cdot (-r) + 1 \cdot (2 + r) = 4$

$2 + 6r + r + 2 + r = 4$

$8r + 4 = 4$

$8r = 0$

$r = 0$

Schritt 2: Parameter-Wert in Gerade einsetzen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $(1,0,2)$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: a) $\frac{812}{3}$

Erklärung:

$$\int_0^4 (5x^3 - 4x^2 + 6x - 3)dx = \left[\frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 3x\right]_0^4$$

$$= \left(\frac{5}{4}4^4 - \frac{4}{3}4^3 + 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4\right) - \left(\frac{5}{4}0^4 - \frac{4}{3}0^3 + 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0\right)$$

$$= \left(5 \cdot 4^3 - \frac{4}{3} \cdot 64 + 3 \cdot 16 - 12\right) - (0 - 0 + 0 - 0)$$

$$= \left(5 \cdot 64 - \frac{256}{3} + 48 - 12\right) - 0$$

$$= 320 - \frac{256}{3} + 36$$

$$= \frac{960}{3} - \frac{256}{3} + \frac{108}{3}$$

$$= \frac{812}{3}$$

Aufgabe 10

Richtige Lösung: d) 5.040

Erklärung:

Hier liegt eine Verkettung (Permutation) vor. Um diese Verkettung von Möglichkeiten zu berechnen, muss man $n!$ ausrechnen. Hier ist $n = 7$. Zu Beginn gibt es 7 mögliche Bücher, die als erstes platziert, werden können. Danach gibt es 6 mögliche Bücher, die als zweites platziert werden und so weiter.

Die Berechnung sieht folgendermaßen aus:

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

5.040 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: a) $y = 2x - 1$

Erklärung:

Um eine Gerade von Vektorenschreibweise in eine Funktionsgleichung zu übersetzen, bilden wir je Dimension eine Gleichung und lösen das Gleichungssystem, sodass wir die Variable aus der Gerade in Vektorenschreibweise eliminieren.

$\vec{v} = \binom{2}{3} + t \cdot \binom{1}{2}$

$\binom{x}{y} = \binom{2}{3} + t \cdot \binom{1}{2}$

$x = 2 + t$

$y = 3 + 2t$

Wir stellen eine Gleichung nach t um und setzen dann für t in der zweiten Gleichung ein. So eliminieren wir diesen Parameter und es bleibt nur x und y übrig.

$x = 2 + t$

$t = x - 2$

$y = 3 + 2 \cdot (x - 2)$

$y = 3 + 2x - 4$

$y = 2x - 1$

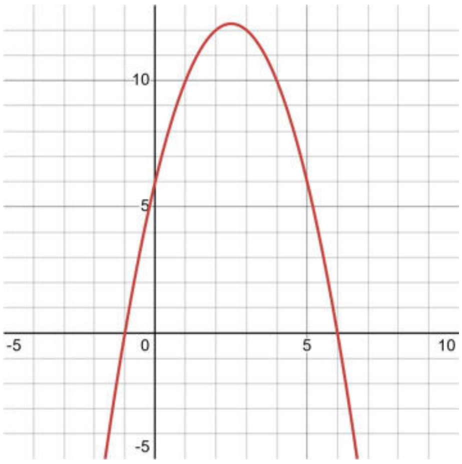
Aufgabe 12

Richtige Lösung: c) $-1 < x < 6$

Erklärung:

Wir können in dem Term eine Parabelfunktion erkennen, da der höchste Exponent 2 ist. Da das Vorzeichen von x^2 negativ ist, wissen wir, dass die Parabel nach unten geöffnet ist und somit nur zwischen den beiden Schnittpunkten mit der X-Achse im positiven Wertebereich liegt.

Visuelle Darstellung:



Rechnerisch müssen wir mit diesem Wissen nur noch die Nullstellen berechnen und das machen wir in diesem Beispiel mithilfe der pq-Formel.

$-x^2 + 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x - 6 < 0$

$p = -5, q = -6$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - (-6)} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = -6$

Demnach ist der Term in der Ungleichung nur größer 0, wenn der x-Wert zwischen 1 und -6 liegt. Wir notieren es folgendermaßen:

$-6 < x < 1$

Aufgabe 13

Richtige Lösung: d) $s = -4$

Erklärung:

Bei einer solchen Aufgabe versuchen wir nach und nach Variablen zu eliminieren, bis wir den Wert der gesuchten Variable erhalten.

I. $p + q + r + s = -10$
II. $4r - 4 = 4s$
III. $p + q - r = 0$
IV. $-7 = 7p + 2r + 2s$

Hier ist zu erkennen, dass wir III. so umstellen können, dass wir in I. für $p+q$ einsetzen können. Damit haben wir eine neue Gleichung nur mit den beiden Variablen r und s. Diese Gleichung stellen wir nach s um, sodass wir in II. für s einsetzen können und somit den Wert von r berechnen können. Danach muss nur noch der Wert von r in eine Gleichung mit r und s eingesetzt werden und wir erhalten den Wert von s.

Schritt 1: III. umstellen und für $p+q$ in I. einsetzen:

III.: $p+q-r=0$

$p+q=r$

In I. einsetzen:

I.: $p+q+r+s=-10$

$r+r+s=-10$

$2r+s=-10$

V.: $s=-10-2r$

Schritt 2: V. in II. einsetzen:

II.: $4r-4=4s$

$4r-4=4\cdot(-10-2r)$

$4r-4=-40-8r$

$12r=-36$

$r=-3$

Schritt 3: Wert von r einsetzen:

V.: $s=-10-2r$

$s=-10-2\cdot(-3)$

$s=-10+6$

$s=-4$

Aufgabe 14

Richtige Lösung: c) $(3{,}7,-5)$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob sich zwei Geraden im Vektorraum schneiden, setzen wir sie gleich und bilden für jede Dimension jeweils eine Gleichung, mithilfe derer wir die Werte der Parameter im Schnittpunkt ermitteln, sofern einer vorliegt. Liegt ein Schnittpunkt vor, setzen wir die Werte der Parameter in die Gerade ein und erhalten den Schnittpunkt.

Schritt 1: Gleichsetzen, Gleichungen bilden & Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Drei Gleichungen:

I. $5 - s = 7 + t$

II. $3 + 2s = 11 + t$

III. $-5 = 15 + 5t$

III.: $-5 = 15 + 5t \quad | -15$

$-20 = 5t \quad | \div 5$

$-4 = t$

Nun setzen wir ein, um den Wert von s zu erhalten:

I.: $5 - s = 7 + (-4) \quad | -5$

$-s = -2 \quad | \cdot -1$

$s = 2$

Schritt 2: Parameter-Werte in Geraden einsetzen und Punkt ausrechnen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + (2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bei beiden Geraden erhalten wir den selben Punkt.

Der Schnittpunkt ist $(3,7,-5)$

Aufgabe 15

Richtige Lösung: c) 10

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Potenzgesetze:

$a^b \cdot a^c = a^{(b+c)} \qquad \rightarrow \qquad a^b \cdot a^{-c} = a^{(b-c)}$

$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$

$$\frac{10^8 \cdot 10^8}{10^5} \cdot 10^{-10} = 10^8 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-1} = 10^{(8+8-5-10)} = 10^1 = 10$$

Aufgabe 16

Richtige Lösung: b) $4x$

Erklärung:

1. und 2. Binomische Formel:

$(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x^2+2x+1) - (x^2-2x+1) = x^2+2x+1-(x^2-2x+1)$

$= x^2 - x^2 + 2x + 2x + 1 - 1 = 4x$

$4x$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man die möglichen Antworten ausrechnen und mit dem gegebenen Vektor vergleichen.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 12 \\ \frac{1}{3} \cdot 12 \\ \frac{1}{3} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18

Richtige Lösung: a) $2x^2 + 9x - 5$

Erklärung:

$$3x^2 + 5x - 2 - (x^2 - 4x + 3) = 3x^2 + 5x - 2 - x^2 + 4x - 3 = 3x^2 - x^2 + 5x + 4x - 2 - 3$$

$$= 2x^2 + 9x - 5$$

$2x^2 + 9x - 5$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: d) e

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgendes Wissen über den $\ln()$:

$$\ln(\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}) = \ln(\mathrm{a}) + \ln(\mathrm{b})$$

$$\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(\mathrm{a})$$

$$\ln(e) = 1$$

Gegeben ist:

$ln(a) + ln(b) = 1$

$a^b = e$

Und wir suchen:

$a \cdot b$

Wir wissen, dass $ln(a) + ln(b) = \ln(a \cdot b)$ und dementsprechend, dass $\ln(a \cdot b) = 1$

Da wir wissen, dass $\ln(e) = 1$ ist können wir die beiden logarithmischen Funktionen gleichsetzen.

$\ln(a \cdot b) = \ln(e) \quad \rightarrow \quad a \cdot b = e$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) $3x + 3y - 18z = 14$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob zwei Ebenen parallel zueinander liegen, ist der schnellste weg, zu prüfen, ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen kollinear sind. Der Normalenvektor zeigt senkrecht auf die Ebene und wenn zwei Ebenen parallel zueinander liegen, dann sind die Normalenvektoren kollinear bzw. ein Vielfaches voneinander.

Da wir in den Antwortmöglichkeiten nur Ebenengleichungen in Koordinatenform gegeben haben, aus denen man den Normalenvektor direkt ablesen kann, müssen wir nur noch den Normalenvektor der Ebene E_1 berechnen und vergleichen.

Normalenvektor von E_1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 - 1 \\ 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss nur noch geprüft werden, zu welchem Normalenvektor dieser kollinear ist.

d) $3x + 3y - 18z = 14$

Hier können wir den Normalenvektor ablesen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -18 \end{pmatrix}$

Kollinearität prüfen: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -18 \end{pmatrix}$

$-x = 3 \qquad x = -3$

$-x = 3 \qquad x = -3$

$6x = -18 \qquad x = -3$

Der Normalenvektor ist ein Vielfaches des Normalenvektors von E_1 und somit liegen die Ebenen parallel zueinander.

Lernset 4

Aufgabe 1

Richtige Lösung: d) $(43{,}10{,}73)$

Erklärung:

Um den Mittelpunkt der Strecke zwischen A und B zu ermitteln, müssen wir zunächst die Strecke $\overrightarrow{AB}$ berechnen und dann diesen Vektor mit $\frac{1}{2}$ multipliziert zu Punkt A dazu addieren.

Schritt 1: Strecke $\overrightarrow{AB}$ bilden:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -1 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 87 \\ -13 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-87 \\ 33+13 \\ 101-45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -88 \\ 46 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Stützvektor Punkt A mit $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ addieren:

$$\begin{pmatrix} 87 \\ -13 \\ 45 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -88 \\ 46 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 \\ -13 \\ 45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -44 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87-44 \\ -13+23 \\ 45+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 10 \\ 73 \end{pmatrix}$$

Die richtige Lösung ist $(43{,}10{,}73)$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: a) 5^{-4x-4}

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Potenzgesetze:

$$a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$$

$$a^b \cdot a^{-c} = a^{(b-c)}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$$

Damit wir die einzelnen Faktoren miteinander multiplizieren und somit die Exponenten miteinander verrechnen können, müssen wir im ersten Schritt bei den Potenzen immer die selbe Basis herstellen. Im zweiten Schritt setzen wir diese wieder in den Bruch ein und vereinfachen.

$125^x = (5^3)^x = 5^{3\cdot x} = 5^{3x}$

$25^2 = (5^2)^2 = 5^{2\cdot 2} = 5^4$

$25^x = (5^2)^x = 5^{2\cdot x} = 5^{2x}$

$$\frac{(5^{3x}\cdot 125^x \cdot 25^2)^{-1}}{5^{-4x}\cdot 25^x} = \frac{(5^{3x}\cdot 5^{3x}\cdot 5^4)^{-1}}{5^{-4x}\cdot 5^{2x}} = \frac{(5^{3x+3x+4})^{-1}}{5^{-4x+2x}} = \frac{(5^{6x+4})^{-1}}{5^{-2x}}$$

$$= \frac{(5^{6x+4})^{-1}}{5^{-2x}} = \frac{5^{-6x-4}}{5^{-2x}} = 5^{-6x-4}\cdot 5^{2x} = 5^{-6x-4+2x} = 5^{-4x-4}$$

Aufgabe 3

Richtige Lösung: b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Schritt 1: E_2 in E_1 einsetzen:

$E_1: 2x - y + z = 4$ $\qquad$ $E_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2 \cdot (1 + 3s + t) - 1 \cdot (-s + t) + 1 \cdot (2 + s) = 4$

$2 + 6s + 2t + s - t + 2 + s = 4$

$8s + t + 4 = 4$

$8s + t = 0$

$t = -8s$

Schritt 2: t in s ausgedrückt in E_2 einsetzen:

Wir wissen, dass $t = -8s$ gilt. Da wir nun die Gerade berechnen wollen, setzen wir in E_2 für t ein und erhalten dann eine Gerade, da wir nur einen Parameter darin enthalten haben. Diese Vereinfachen wir noch und erhalten dann die Schnittgerade in Parameterform.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-8s) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s \\ -s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8s \\ -8s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3s - 8s \\ -s - 8s \\ s \ +0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5s \\ -9s \\ s \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Richtige Lösung: b) $f(x) = -(x-3)^2 - 3$

Erklärung:

Im Graphen ist eine Parabel zu sehen, welche nach unten geöffnet ist. Der Extrempunkt scheint ca. bei dem Punkt (3|-3) zu liegen. Das bedeutet, dass die Parabel entlang der X-Achse um 3 Einheiten nach rechts verschoben ist. Mit diesem Wissen können wir Antwortmöglichkeit d) bereits ausschließen, weil bei dieser Funktion in der quadrierten Klammer eine 3 addiert wird, was bedeutet, dass die Parabel um 3 Einheiten nach links verschoben wird.

Darüber hinaus wissen wir auch, dass die Parabel um 3 Einheiten nach unten verschoben wurde. An dieser Stelle kann man bereits erkennen, dass Antwortmöglichkeit b) richtig ist, weil in dieser Funktion in der quadrierten Klammer eine 3 subtrahiert wird (Rechtsverschiebung) und eine Konstante von -3 vorhanden ist, was die Verschiebung nach unten erklärt.

Falls man sich mit dieser Parabelform noch nicht sicher ist, kann man auch x-Werte bei den übrigen Funktionen einsetzen und am Graphen ablesen, welche Werte falsch sind. Hier würde sich $x = 3$ anbieten.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: d) $\frac{4}{9}$

Erklärung:

Ort	Einkaufszentrum	Supermarkt	Online-Shop	Σ
Kaufen vorwiegend online	35	40	125	200
Kaufen vorwiegend offline	65	85	100	250
Σ	100	125	225	450

Für unsere Rechnung sind die grün markierten Zellen in der Tabelle relevant. Um zu berechnen, wie hoch der Anteil derjenigen ist, die vorwiegend online kaufen, müssen wir die absolute Anzahl derjenigen, die vorwiegend online kaufen mit der gesamten Anzahl an befragten Personen in Beziehung setzen.

$$\frac{200}{450}$$

Dann muss der Bruch noch so weit wie möglich gekürzt werden.

$$\frac{200}{450} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

$\frac{4}{9}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: c) 80

Erklärung:

Damit zwei Ereignisse unabhängig voneinander sind, muss folgendes gelten:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$P(H)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass jemand einen Helm trägt.

$P(W)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass jemand eine Warnweste trägt.

Gegeben:

$$P(H) = \frac{60}{400}$$

$$P(H \cap W) = \frac{12}{400}$$

Gesucht:

Anzahl der Mitarbeiter in einer Führungsposition.

$$P(F) = \frac{P(H \cap W)}{P(H)} = \frac{\frac{12}{400}}{\frac{60}{400}} = \frac{12}{400} \cdot \frac{400}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$0{,}2 \cdot 400 = 80$$

80 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: c) 90 %

Erklärung:

Gegeben: $P(Laptop) = 0{,}4$

$P(Ipad) = 0{,}7$

$P(Laptop \cap Ipad) = 0{,}2$

($Laptop \cap Ipad$ bedeutet Laptop und Ipad)

Gesucht: $P(Laptop \cup Ipad)$

($Laptop \cup Ipad$ bedeutet Laptop oder Ipad)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(Laptop \cup Ipad) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9$$

90 % der Studenten nutzen mindestens eines der beiden Geräte zum Lernen.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: b) 2

Erklärung:

Um den Abstand des Punktes zur Ebene zu berechnen, müssen wir in folgende Formel einsetzen:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wobei gilt: $P(x_0, y_0, z_0)$ und E: $Ax + By + Cz = D$

Die gegebenen Werte:

$3x - 2y + 6z = 18$

$P(4,1,-1)$

$A = 3, B = -2, C = 6, D = 18$

$x_0 = 4, y_0 = 1, z_0 = -1$

Jetzt setzen wir ein:

$$d = \frac{|3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) - 18|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}}$$

Wir rechnen separat den Zähler aus:

$|3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) - 18| = |12 - 2 - 6 - 18| = |-14| = 14$

Wir rechnen separat den Nenner aus:

$\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$

Wieder eingesetzt:

$$d = \frac{14}{7} = 2$$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: c) $x = -4$

Erklärung:

Die Summe innerhalb der Betragsstriche muss ungeachtet des Vorzeichens 7 ergeben. Demnach gibt es 2 Gleichungen, die sehr einfach zu lösen sind.

$7 = x - 3$ → $x = 10$

$-7 = x - 3$ → $x = -4$

$x = -4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: b) $f(x) \to \infty$

Erklärung:

Um das Verhalten im Unendlichen zu bestimmen, betrachten wir immer den Term mit der höchsten Potenz, da dieser bei $x \to \infty$ dominiert.

Hier ist der Term mit der höchsten Potenz x^3. x^3 wächst schneller als x^2, daher wird $f(x)$ gegen Unendlich gehen, wenn x gegen Unendlich geht.

Mathematisch ausgedrückt: $\lim_{x \to \infty}(x^3 - 4x^2 + 2) = \infty$

Aufgabe 11

Richtige Lösung: d) 64

Erklärung:

Die verbal formulierte Gleichung gilt es hier zunächst einmal aufzuschreiben und dann nach x umzustellen:

$\sqrt{x} = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$

$x = \left(2 \cdot \sqrt[3]{x}\right)^2 = 4 \cdot x^{\left(\frac{2}{3}\right)}$

$$\frac{x}{x^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = 4$$

$$x^{1-\frac{2}{3}} = 4$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$x = 4^3 = 64$$

Aufgabe 12

Richtige Lösung: c) 2

Erklärung:

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streubreite eines Wertes um den Durchschnitt herum. Während die Varianz die quadrierte Streuung von Werten um den Durchschnitt herum berechnet, berechnet man mit der Standardabweichung die einfache Streuung. Daher ziehen wir die Wurzel der Varianz, um die Standardabweichung zu berechnen. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$Var(x) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

Und die Formel zur Berechnung der Standardabweichung ist demnach:

$$Std(x) = \sqrt{Var(x)}$$

Schritt 1: Mittelwert berechnen:

$$\bar{x} = \frac{3+5+6+7+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Schritt 2: Varianz berechnen:

$$Var(x) = \frac{(3-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(9-6)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{(-3)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2}{5} = \frac{9+1+1+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Schritt 3: Standardabweichung berechnen:

$$Std(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{4} = 2$$

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) $4x^2 + 16xy + 16y^2 + x$

Erklärung:

1. Binomische Formel

$$(2x + 4y)^2 + x = 4x^2 + 16xy + 16y^2 + x$$

$4x^2 + 16xy + 16y^2 + x$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: a) 1680

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge beachtet werden muss, wobei Wiederholung nicht stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Variation ohne Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Hier gilt: $n = 8$ und $k = 4$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

1680 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: a) 126

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge nicht beachtet wird, wobei Wiederholung stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$ → Binomialkoeffizient

Hier gilt: $n = 6$ und $k = 4$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\cdot(9-4)!} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 1} =$

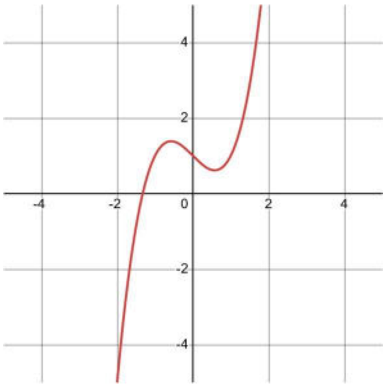
$\frac{9\cdot 2\cdot 7}{1} = 126$

126 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) Punktsymmetrie zu einem anderen Punkt

Erklärung:



Funktionen, deren höchster Exponent ungerade ist, wie hier, können ausschließlich punktsymmetrisch sein. Entscheidend ist, ob die Funktion durch den Koordinatenursprung läuft, oder nicht. Das kann hier ganz einfach geprüft werden, indem man $x = 0$ einsetzt und sofern auch der Funktionswert 0 ergibt, verläuft die Funktion durch den Koordinatenursprung. $f(0) = (0)^3 - (0) + 1^{(0)} = 0 - 0 + 1$

Wir wenden folgendes Potenzgesetz an: $a^0 = 1$ (Egal, was wir hoch 0 nehmen, es ergibt immer 1)

→ die Funktion verläuft nicht durch den Koordinatenursprung und ist somit punktsymmetrisch zu einem anderen Punkt.

Punktsymmetrie zu einem anderen Punkt ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: b) $f(3) = \ln(3) + 3$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen folgende ln-Regeln bekannt sein:

$\ln(a \cdot e^x) = \ln(a) \cdot \ln(e^x)$

$\ln(e^x) = x$ → Der $\ln$ und e^x lösen sich gegenseitig auf.

Demnach gilt:

$f(3) = \ln(3 \cdot e^3) = \ln(3) + \ln(e^3) = \ln(3) + 3$

$\ln(3) + 3$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: d) $\frac{1}{66}$

Erklärung:

Im Kleiderschrank liegen insgesamt 11 T-Shirts. Davon sind 6 schwarz und 5 sind nicht schwarz. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit dafür ermitteln, dass nur nicht-schwarze T-Shirts gegriffen werden.

$$\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{55 \cdot 12} = \frac{10}{660} = \frac{1}{66}$$

$\frac{1}{66}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

Erklärung:

Die generalisierte Form einer quadratischen Funktion 2. Grades ist $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Wir kennen bereits die Variable $b = -4$.

In der Aufgabenstellung ist uns gegeben, dass die Funktion in $P(-1/5)$ einen Extrempunkt hat, was uns folgende zwei Informationen gibt:

$f(-1) = 5$

$f'(-1) = 0$

Letzteres können wir schlussfolgern, da wir wissen, dass im Extrempunkt die Steigung immer 0 ist.

Demnach müssen wir nur noch einsetzen und nach den Variablen auflösen:

$f(-1) = 5 = a \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + c = a + 4 + c$

$5 = a + 4 + c$

$1 = a + c$

$f'(-1) = 0 = 2a \cdot (-1) - 4 = -2a - 4$

$4 = -2a$

$a = -2$

Den Wert für a setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten auch den Wert für c:

$1 = -2 + c$

$c = 3$

Die vollständige quadratische Funktionsgleichung lautet $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) $F(x) = e^x - \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + C$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man entweder die gegebene Funktion integrieren oder die Stammfunktionen in den Antwortmöglichkeiten ableiten, wobei es sich hier empfiehlt, zu integrieren.

$$f(x) = e^x - \frac{1}{x} - x$$

Zunächst schreiben wir den Bruch um in eine Potenz.

Potenzgesetz: $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$

Dementsprechend lautet die Funktion folgendermaßen:

$f(x) = e^x - x^{-1} - x$

Nun bilden wir die Stammfunktion.

Dazu brauchen wir folgende Integrationsregel: $f(x) = \frac{1}{x}$

$F(x) = \ln(x)$

e^x bleibt beim Ableiten und Integrieren unverändert.

$$F(x) = e^x - \ln(x) - \frac{1}{(1+1)} x^{(1+1)}$$

$$= e^x - \ln(x) - \frac{1}{2} x^2$$

Zuletzt muss noch die Konstante C addiert werden, da es sich um ein unbestimmtes Integral handelt.

$F(x) = e^x - \ln(x) - \frac{1}{2} x^2 + C$ ist die richtige Antwort.

Lernset 5

Aufgabe 1

Richtige Lösung: c) $20^{-3} = 0{,}0000125$

Erklärung:

$$20^{-3} = \frac{1}{20 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{1}{8.000} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1.000} = 0{,}125 \cdot \frac{1}{1.000} = 0{,}000125 \neq 0{,}0000125$$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: a) $x > 3$

Erklärung:

$3^x > 27$

à hier muss 27 in Form von einer Potenz mit der Basis 3 umgeschrieben werden.

$3^x > 3^3$ à $x > 3$

$x > 3$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: c) 2

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen bilden wir zunächst die erste Ableitung und setzen diese anschließend $= 0$. Die Anzahl der individuellen x-Werte entspricht der Anzahl der Nullstellen.

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 10x^2 - 22x - 71$

$f'(x) = 2x^2 + 20x - 22$

$$f'(x) = 2x^2 + 20x - 22 = 0 \qquad |\div 2$$

$$x^2 + 10x - 11 = 0 \qquad |pd - Formel$$

$p = 10$
$q = -11$

$$x_{1,2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (-11)}$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 11}$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{36}$$

$$x_1 = -5 + 6 = 1$$

$$x_2 = -5 - 6 = -11$$

Demnach hat die erste Ableitung 2 Nullstellen, da wir 2 individuelle x-Werte berechnen konnten.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: c) 50

Erklärung:

Vektor zwischen den zwei Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 297 - 337 \\ 112 - 112 \\ 94 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors:

$$\sqrt{(-40)^2 + (0)^2 + (30)^2} = \sqrt{1.600 + 900} = \sqrt{2.500} = \sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50$$

50 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: a) 21,2

Erklärung:

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung von Werten. Je höher, desto größer die Streuung. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

Demnach berechnen wir immer zuerst den Durchschnittswert ($\bar{x}$) und anschließend die Varianz.

Produktnummer	1	2	3	4	5
Preis	12	13	17	25	18

$$\bar{x} = \frac{12+13+17+25+18}{5} = \frac{85}{5} = 17$$

$$Var(x) = \frac{(12-17)^2+(13-17)^2+(17-17)^2+(25-17)^2+(18-17)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{(-5)^2+(-4)^2+(0)^2+(8)^2+(1)^2}{5} = \frac{25+16+0+64+1}{5} = \frac{106}{5}$$

$$Var(x) = \frac{105}{5} + \frac{1}{5} = 21 + 0{,}2 = 21{,}2$$

Die Varianz der Arbeitnehmerzahl beträgt 21,2.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: d) $\frac{64}{2197}$

Erklärung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Zug keine Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{16}{52}$, also $\frac{4}{13}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3 Karten hintereinander keine Zahl gezogen wird, beträgt dementsprechend $\left(\frac{4}{13}\right)^3 = \frac{64}{2197}$

$\frac{64}{2197}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: b) $D(2/-4)$

Erklärung:

Damit es eine symmetrische Raute ergibt, muss Punkt D auf der selben x-Koordinate sein, wie . Also auf $x = 2$. Nun muss noch die y-Koordinate bestimmt werden. Dazu schauen wir uns den Abstand zwischen der Höhe von und $A(0/-1)$ bzw. hinsichtlich der y-Koordinate an.

$y_C - y_B = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

Nun muss D den selben Abstand von 3 zu A bzw. B haben, bloß in die andere Richtung, also -3.

$y_D = y_A - 3 = -1 - 3 = -4$

Der Punkt D ist also $(2/-4)$.

$D(2/-4)$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: b) $\left(\frac{455}{2}, 141{,}95\right)$

Erklärung:

Um den Mittelpunkt der Strecke zwischen A und B zu ermitteln, müssen wir zunächst die Strecke $\overrightarrow{AB}$ berechnen und dann diesen Vektor mit $\frac{1}{2}$ multipliziert zu Punkt A dazu addieren.

Schritt 1: Strecke $\overrightarrow{AB}$ bilden:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 119 \\ 71 \\ 204 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 336 \\ 211 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 - 336 \\ 71 - 211 \\ 204 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -217 \\ -140 \\ 218 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Stützvektor Punkt A mit $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ addieren:

$$\begin{pmatrix} 336 \\ 211 \\ -14 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -217 \\ -140 \\ 218 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336 \\ 211 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -108{,}5 \\ -70 \\ 109 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336 - 108{,}5 \\ 211 - 70 \\ -14 + 109 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 227{,}5 \\ 141 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Die richtige Lösung ist $\left(\frac{455}{2}, 141{,}95\right)$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: d) $x = 4$

Erklärung:

$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1 \qquad |+\sqrt{x}$

$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x} \qquad |()^2$

$x + 5 = (1 + \sqrt{x})^2 \qquad |Ausmultiplizieren$

$x + 5 = 1 + 2 \cdot \sqrt{x} + x \qquad |-x$

$5 = 1 + 2 \cdot \sqrt{x} \qquad |-1$

$4 = 2 \cdot \sqrt{x} \qquad |\div 2$

$2 = \sqrt{x} \qquad |()^2$

$x = 4$

$x = 4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: a) $f(x) = \sqrt{x} \quad | \quad g(x) = \ln(x)$

Erklärung:

Grundlagen: Der ln und die Wurzelfunktion

Für diese Aufgabe ist es wichtig die Unterschiede von dem ln und der Wurzelfunktion zu kennen. Sie haben zwar die Gemeinsamkeit, dass sie beide nicht für negative x-Werte definiert sind. Allerdings ist der ln auch für $x = 0$ nicht definiert, wobei die Wurzel aus 0 einfach 0 ergibt.
Der wichtigste Unterschied ist jedoch, dass die ln-Funktion negative Werte annehmen kann. Je kleiner das x (sofern kleiner als 1) desto negativer wird der Funktionswert.
Die Wurzelfunktion hingegen kann niemals negative Werte annehmen.

Nun zur Lösung:

Schauen wir uns zuerst f(x) an. Wir sehen hier ganz klar, dass es keine negativen Funktionswerte gibt, weshalb wir den ln ausschließen können und somit auch die Antwortmöglichkeiten b) und c).

Schauen wir uns noch g(x) an. Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ würde für positive x-Werte nur positive Funktionswerte ergeben, weshalb wir a) ausschließen können.

Somit ist die richtige Antwort $f(x) = \sqrt{x} \quad | \quad g(x) = \ln(x)$.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: d) 255 cm²

Erklärung:

$$Radius = \frac{1}{2} \cdot Durchmesser$$

$$Fläche = (Radius)^2 \cdot \pi$$

$$Fläche = \left(\frac{1}{2} \cdot 18\right)^2 \cdot \pi = 9^2 \cdot \pi = 81\pi \approx 255$$

255 cm² ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: c) $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

Erklärung:

Diese Aufgabe kann durch Ableiten oder Integration gelöst werden. Hier empfiehlt es sich eher zu integrieren.

$$f'^{(x)} = 3 \cdot \frac{1}{x^{-2}} + x + 1 = 3x^2 + x + 1$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{3}{2+1} \cdot x^{2+1} + \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} + 1 \cdot x^{0+1} = \frac{3}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: b) $t(x) = -x - 2$

Erklärung:

Um die Tangente herauszufinden, muss zunächst die Steigung ermittelt werden. Diese ergibt sich aus der Ableitung von $f(x)$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 - 4$

Als nächstes muss, ermittelt werden, welche Steigung $f(x)$ konkret im Punkt $(1, -3)$ hat. Dazu setzen wir den x-Wert in die Ableitung ein. $f'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 4 = -1$. Somit beträgt die Steigung -1. Nun setzen wir die Steigung und den Punkt in die übliche Tangentengleichung ($t(x) = mx + b$) ein.

$-3 = -1 \cdot 1 + b$ à $-3 = -1 + b$ à $-2 = b$

Somit ist die fertige Tangentengleichung $t(x) = -x - 2$

Aufgabe 14

Richtige Lösung: b) $x \geq 0$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, muss Du wissen, dass man nicht durch 0 teilen darf und dass man keine Wurzel aus negativen Werten ziehen darf. Das bedeutet, dass der Nenner dieses Bruchterms nicht $=$ 0 sein darf.

Zunächst setzen wir den Term in der Wurzel ≥ 0, um herauszufinden, welche Werte x annehmen darf.

$2x \geq 0 \leftrightarrow x \geq 0$

Demnach muss $x \geq 0$ sein.

Beim Bruch müssen wir prüfen, für welche x-Werte der Nenner $= 0$ ist.

Der Nenner wird nie 0, weil x^2 nicht negativ werden kann und 12 addiert wird.

$x \geq 0$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: a) $\frac{7}{20}$

Erklärung:

Es gibt zwei Berechnungen, die wir separat anstellen, um die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zu ermitteln. Zunächst einmal das Szenario, dass wir aus Urne A eine der beiden blauen Kugeln ziehen. Damit es keine rote und keine gleichfarbige Kugel aus Urne B gibt, kommen da nur noch die beiden grünen Kugeln in Frage.

Die Wahrscheinlichkeit, dass also eine der beiden blauen Kugeln aus Urne A und simultan eine der beiden grünen Kugeln aus Urne B gezogen wird, beträgt:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{4}{20}$$

Die zweite Berechnung ist für den Fall, dass wir aus Urne A die gelbe Kugel ziehen und aus Urne B entweder die blaue Kugel oder eine der beiden grünen Kugel ziehen.
Die Wahrscheinlichkeit für dieses Szenario berechnen wir folgendermaßen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$$

Um die Wahrscheinlichkeit des Gesamtereignisses zu berechnen, müssen wir noch die beiden Wahrscheinlichkeiten addieren:

$$\frac{4}{20} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

$\frac{7}{20}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: b) 3

Erklärung:

Um herauszufinden, wie viele Überraschungseier man kaufen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% mindestens ein Spielzeug zu erhalten, wenn die Wahrscheinlichkeit, in einem Ei ein Spielzeug zu finden, 90% beträgt, verwenden wir folgenden Ansatz:

Wir suchen die kleinste Anzahl von Eiern n, für die gilt:

$1-(1-\frac{9}{10})^n \geq \frac{999}{1.000}$ $\quad\quad |+(1-0{,}9)^n$

$1 \geq \frac{999}{1.000}+(1-\frac{9}{10})^n$ $\quad\quad |-0{,}999$

$1-\frac{999}{1.000} \geq (1-\frac{9}{10})^n$ $\quad\quad |-0{,}999$

$\frac{1}{1.000} \geq \left(\frac{1}{10}\right)^n$ $\quad\quad \left|\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{1.000}\right)\right.$ $\quad\quad \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1.000}$

$n \geq 3$

3 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: c) $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Erklärung:

Um eine Funktionsgleichung in Vektorenschreibweise zu übersetzen, müssen wir zunächst anhand der Steigung den Richtungsvektor bestimmen und anschließend anhand der Konstante in der Funktionsgleichung den Stützvektor der Geraden.

Steigung:

Die Steigung beträgt gemäß der Funktionsgleichung $-\frac{1}{2}$. Das bedeutet, wenn x um 2 Einheiten steigt, sinkt y um 1 Einheit. In Vektorenschreibweise drücken wir das so aus:

$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Stützvektor:

Setzen wir in die Funktionsgleichung für $x=0$ ein, erhalten wir einen Punkt, der auf der Geraden liegt. Diesen übersetzen wir in die Vektorenschreibweise und erhalten so unsere fertige Gerade.

$$y=-\frac{1}{2}\cdot 0+4=0+4=4$$

Stützvektor: $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

Die Gerade: $\vec{v} = \binom{0}{4} + t \cdot \binom{2}{-1}$

Wir erkennen, dass es zwei Antwortmöglichkeiten mit dem selben Richtungsvektor gibt, allerdings haben sie andere Stützvektoren. Deshalb müssen wir prüfen, ob die jeweiligen Stützvektoren auf der gesuchten Gerade liegen.

a)

Stützvektor: $\binom{-2}{3}$ → wir setzen den x-Wert in die Funktionsgleichung ein und prüfen, ob der Punkt darauf liegt.

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 4 = 1 + 4 = 5 \neq 3$$

Antwortmöglichkeit a) kann ausgeschlossen werden.

c)

Stützvektor: $\binom{4}{2}$ → wir setzen den x-Wert in die Funktionsgleichung ein und prüfen, ob der Punkt darauf liegt.

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (4) + 4 = -2 + 4 = 2$$

Der Stützvektor liegt auf der Geraden.

Die richtige Lösung ist $\vec{v} = \binom{4}{2} + t \cdot \binom{2}{-1}$

Aufgabe 18

Richtige Lösung: a) 1

Erklärung:

Hier liegt eine Aufgabe mit einer klassischen 4-Felder-Tafel vor.

Wir bilden sie hier inkl. der Summen ab, um die Lösung etwas greifbarer zu machen:

	Immun	Nicht Immun	∑
Als „immun" dokumentiert	**300*0,95 = 285**	**300*0,05 = 15**	**300**
Nicht als „immun" dokumentiert			**900**
∑			**1.200**

Mithilfe der gegebenen Werte können wir in einer 4-Felder-Tafel das Ergebnis kalkulieren. Dazu berechnen wir zuerst die Gesamtanzahl an fehlerfreien und fehlerhaften Waren und berechnen dann die absolute Anzahl an falsch-positiven Qualitätstests.

Um die Anzahl der falsch-positiven (also fälschlicherweise als „immun" eingetragenen) berechnen zu können, müssen wir die Wahrscheinlichkeit für ein falsch-positives Ergebnis kennen. Das ergibt sich aus der Aufgabenstellung. Wenn die Impfung bei 5 % der Personen keine Wirkung entfaltet und diese dennoch als „immun" dokumentiert werden, dann entspricht die Wahrscheinlichkeit für ein falsch-positives Ergebnis genau 5 %.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: c) $a = 1$

Erklärung:

Wir berechnen das Integral und lösen danach die Gleichung nach a auf.

$$\int_a^4 (\sqrt{x}) dx = \frac{14}{3}$$

$$\int_a^4 \left(x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{14}{3}$$

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_a^4 = \frac{14}{3}$$

$$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_a^4 = \frac{14}{3}$$

$$\left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_a^4 = \frac{14}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{3}$$

$$16 - 2 \cdot a^{\frac{3}{2}} = 14$$

$$16 - 14 = 2 \cdot a^{\frac{3}{2}}$$

$$2 = 2 \cdot a^{\frac{3}{2}}$$

$$1 = a^{\frac{3}{2}}$$

$$1 = \sqrt{a^3}$$

$1^2 = 1 = a^3$

$a = \sqrt[3]{1} = 1$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: b) $x = 3,\ y = 1,\ w = -2,\ z = 7$

Erklärung:

Bei einer solchen Aufgabe versuchen wir nach und nach Variablen zu eliminieren, bis wir eine Variable in einer Zahl ausdrücken und dann einsetzen können, um die anderen Variablen zu ermitteln.

I. $3x - 4w = 6 + 4y + z$
II. $3z = 7x$
III. $-5w = z + x$
IV. $10 = 4x + w$

Wir sehen, dass II. nur x und z als Variablen enthält, IV. enthält nur x und w und III. enthält x, w und z. Demnach können wir II. nach z umstellen, in III. einsetzen und haben die neue Gleichung V., welche nur x und w enthält, genau so wie IV. Anschließend können wir diese beiden Gleichungen miteinander verrechnen und erhalten den Wert für die erste Variable.

Dann muss mit den bekannten Werten nur noch eingesetzt werden.

1. Schritt: II. nach z umstellen:

$3z = 7x$

$z = \frac{7}{3} \cdot x$

2. Schritt: II. in III. einsetzen:

$-5w = \frac{7}{3} \cdot x + x = \frac{10}{3}$

$w = \frac{1}{-5} \cdot \frac{10}{3} \cdot x = -\frac{10}{15} \cdot x = -\frac{2}{3}x$

V.: $w = -\frac{2}{3}x$

3. Schritt: V. in IV. einsetzen:

$10 = 4x + \left(-\frac{2}{3}x\right) = \frac{12}{3}x - \frac{2}{3}x = \frac{10}{3}x$

$10 = \frac{10}{3}x$

$x = 3$

4. Schritt: Zahlenwerte für Variablen einsetzen:

$z = \frac{7}{3} \cdot (3) = 7$

$w = -\frac{2}{3} \cdot (3) = -2$

$3 \cdot (3) - 4 \cdot (-2) = 6 + 4y + (7)$

$9 + 8 = 6 + 4y + 7$

$4 = 4y$

$y = 1$

$x = 3,\ y = 1,\ w = -2,\ z = 7$ ist die richtige Antwort.

Lernset 6

Aufgabe 1

Richtige Lösung: a) $-5x + 4y + 8$

Erklärung:

Wir lösen zunächst alle Klammern auf, sodass jede Komponente mit dem entsprechenden Vorzeichen alleine für sich steht und verrechnen sie dann im Anschluss miteinander.

$5 - 2(x + y) + 4 - [3(x - 2y) + 1] = 5 - 2x - 2y + 4 - [3x - 6y + 1]$

$= 5 - 2x - 2y + 4 - 3x + 6y - 1 = -2x - 3x - 2y + 6y + 5 + 4 - 1$

$= -5x + 4y + 8$

$-5x + 4y + 8$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: b) 1.014 cm²

Erklärung:

Der Würfel hat 6 Seiten, daher multiplizieren wir die quadrierte Kantenlänge mit 6.

Formel: $Oberfläche = 6 \cdot (Kantenlänge)^2$

$Oberfläche = 6 \cdot (13)^2 = 6 \cdot 169 = 1.014$

1.014 cm² ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: c) ca. 4 %

Erklärung:

Die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zu beheben liegt bei $0{,}95 = \frac{19}{20}$

Die Wahrscheinlichkeit einen Fehler nicht zu beheben liegt bei $0{,}05 = \frac{1}{20}$

Die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Szenario beträgt demnach:

$0{,}95^6 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95$

$0{,}95^6 \approx 1 - 6 \cdot 0{,}05 = 0{,}7$

$$0{,}05 \cdot 0{,}95 = \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{400} \approx \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$0{,}95^6 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 \approx 0{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}035$

Die richtige Antwort ist ca. 4 %.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: c) $x = \sqrt{e^y + 16}$

Erklärung:

Die Umkehrfunktion zu bilden bedeutet, dass man nach x umstellen muss. Dazu formen wir die Funktion folgendermaßen um:

$y = \ln(x^2 - 16) \qquad |e^{(\dots)}$

$e^y = x^2 - 16 \qquad |+16$

$e^y + 16 = x^2 \qquad |\sqrt{}$

$x = \sqrt{e^y + 16}$

Aufgabe 5

Richtige Lösung: d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Wir berechnen zuerst den Vektor $\overrightarrow{BC}$ und schließen basierend darauf die ersten Antwortmöglichkeiten aus. Die übrigen untersuchen wir darauf, ob sie durch den Punkt A laufen.

Schritt 1: Den Vektor $\overrightarrow{BC}$ berechnen:

Um $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen, rechnen wir $C - B$:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Antwortmöglichkeit a) und c) können bereits ausgeschlossen werden, da der Richtungsvektor kein Vielfaches von $\overrightarrow{BC}$ ist.

Schritt 2: Prüfen, ob die Gerade durch den Punkt A läuft.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-2{,}5 + t \cdot 3 = 2$$

$$t = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

$$0 + t \cdot 2 = 3$$

$$t = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$5{,}5 + t \cdot -3 = 1$$

$$t = \frac{-4{,}5}{-3} = 1{,}5$$

Für alle drei Dimensionen gilt der selbe Wert für den Skalar t. Das bedeutet, dass die Gerade durch den Punkt A läuft.

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Richtige Lösung: c) $x = \frac{1}{2}$

Erklärung:

Solche Aufgaben können einen schnell aus dem Konzept bringen, aber keine Sorge, sie sind einfacher als es aussieht. Hier musst Du den Term Schritt für Schritt vereinfachen. Und anschließend wird nach x umgestellt.

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Rechengesetze:

$\ln(e^a) = a$

$e^{\ln(a)} = a$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$\frac{ln\left(\sqrt{e^{4x}}\right) + \sqrt{16 - x^2}}{2x + 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}} = 2x$$

$$= \ln\left(\sqrt{e^{4x}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2} \cdot 4x}\right) = \ln(e^{2x}) = 2x \cdot \ln(e) = 2x \cdot 1 = 2x$$

$$\frac{2x + \sqrt{16 - x^2}}{2x + 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}} = 2x$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} = \sqrt{\frac{16 - x^2}{16}} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$$

$$\frac{2x+\sqrt{16-x^2}}{2x+4\cdot\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}=2x$$

$$\frac{2x+\sqrt{16-x^2}}{2x+\sqrt{16-x^2}}=2x$$

$$1=2x$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Aufgabe 7

Richtige Lösung: a) Sie schneiden sich nicht.

Erklärung:

Um zu prüfen, ob sich zwei Geraden im Vektorraum schneiden, setzen wir sie gleich und bilden für jede Dimension jeweils eine Gleichung, mithilfe derer wir die Werte der Parameter im Schnittpunkt ermitteln, sofern einer vorliegt. Liegt ein Schnittpunkt vor, setzen wir die Werte der Parameter in die Gerade ein und erhalten den Schnittpunkt.

Schritt 1: Gleichsetzen, Gleichungen bilden & Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix}-4\\7\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\12\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\-7\end{pmatrix}$$

Drei Gleichungen:

I. $-4+3s=5+t$
II. $7+3s=7+6t$
III. $9-5s=12-7t$

II.: $7+3s=7+6t \quad |-7$

$3s=6t \quad |\div 2$

$s=2t$

Jetzt setzen wir für s in I. ein:

$-4 + 3 \cdot (2t) = 5 + t$

$-4 + 6t = 5 + t$

$5t = -9$

$t = -\frac{9}{5}$

$s = 2t$

$s = 2 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right)$

$s = -\frac{18}{5}$

Schritt 2: Parameter-Werte mit Gleichung prüfen:

Da die Parameter-Werte eher komplizierte Brüche sind, kann man auch zunächst mit der dritten Gleichung in diesem Beispiel testen, ob überhaupt ein Schnittpunkt vorliegt. Andernfalls müsste man etwas mehr rechnen, um diese Erkenntnis zu haben.

$9 - 5 \cdot \left(-\frac{18}{5}\right) = 12 - 7 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right)$

$9 + 18 = 12 + 7 \cdot \frac{9}{5}$

$27 = 12 + 7 \cdot \frac{9}{5}$

$15 = 7 \cdot \frac{9}{5}$

$75 = 7 \cdot 9$

$75 \neq 63$

Hier können wir erkennen, dass die Gleichung nicht aufgehen kann und somit auch kein Schnittpunkt vorliegt.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: c) $Mittelwert = 5{,}8; Median \ = 5{,}5; Modus \ = 5; Spannweite \ = 6$

Erklärung:

Zu den einzelnen Statistiken:

- Der Mittelwert ist der Durchschnitt aller Werte.
- Der Median ist der Wert, der genau in der Mitte der Datenverteilung liegt (wenn die Werte nach Größe sortiert aufgelistet sind).
- Der Modus ist der Wert, der am häufigsten in einem Datensatz vorkommt.
- Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert in der Datenverteilung.

Zur Berechnung:

$$Mittelwert = \frac{5+3+5+6+7+9}{6} = \frac{35}{6} = 5 + \frac{5}{6} = 5{,}8$$

$Median$: $(3{,}5{,}5{,}6{,}7{,}9)$ → Da wir eine gerade Anzahl an Werten haben, können wir den Median nicht direkt ablesen, sondern müssen ihn berechnen.
Den Median bei einer geraden Anzahl berechnen wir, indem wir die beiden Werte um die Mitte der Verteilung addieren und dann durch 2 teilen.

$$\frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

$Modus$: $(3{,}5{,}5{,}6{,}7{,}9)$ → Der häufigste Wert in dieser Datenverteilung ist 5.

$Spannweite = 9 - 3 = 6$

Die richtige Antwort ist $Mittelwert = 5{,}8; Median \ = 5{,}5; Modus \ = 5; Spannweite \ = 6$.

Aufgabe 9

Richtige Lösung: c) $\vec{r} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 32 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man die möglichen Antworten ausrechnen und mit dem gegebenen Vektor vergleichen.

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 21 \\ \frac{1}{3} \cdot 21 \\ \frac{1}{3} \cdot 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot -8 \\ \frac{1}{4} \cdot 12 \\ \frac{1}{4} \cdot 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 32 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Richtige Lösung: b) 19 %

Erklärung:

Hier handelt es sich um disjunkte Ereignisse, was meint, dass nicht aus mehreren Kisten gleichzeitig eine Gurke gezogen werden kann, sondern nur genau aus einer. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, ob die gewählte Gurke verfault ist oder nicht, von der Kiste abhängig.
Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Kiste zu wählen ist bei allen drei Kisten gleich und beträgt $\frac{1}{3}$.
Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten eine verfaulte Gurke zu greifen:

$$P(verfault \mid Kiste\ 1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(verfault \mid Kiste\ 2) = \frac{2}{9}$$

$$P(verfault \mid Kiste\ 3) = 0$$

Insgesamt beträgt die Wahrscheinlichkeit eine verfaulte Gurke zu greifen also:

$$P(verfault) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + 0\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{27}$$

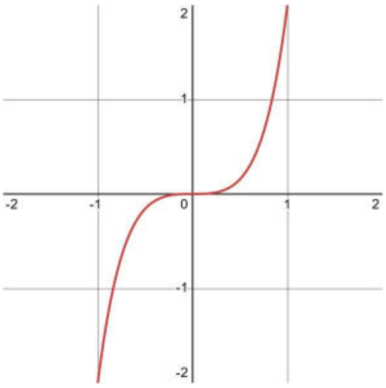
$$\frac{5}{27} \cdot 4 = \frac{20}{108} \approx \frac{19}{100}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 19 %.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: c) Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

Erklärung:



Funktionen, deren höchster Exponent ungerade ist, wie hier, können ausschließlich punktsymmetrisch sein. Entscheidend ist, ob die Funktion durch den Koordinatenursprung läuft, oder nicht. Das kann hier ganz einfach geprüft werden, indem man $x = 0$ einsetzt und sofern auch der Funktionswert 0 ergibt, verläuft die Funktion durch den Koordinatenursprung. $f(0) = (0)^5 + (0)^3 = 0 + 0 = 0$

→ die Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und ist somit punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: b) $18x^2y^2 + 8$

Erklärung:

1. und 2. Binomische Formel

2. Binomische Formel:

$(3xy - 2)^2 = 9x^2y^2 - 12xy + 4$

1. Binomische Formel

$(3xy + 2)^2 = 9x^2y^2 + 12xy + 4$

$(3xy-2)^2+(3xy+2)^2=9x^2y^2-12xy+4+9x^2y^2+12xy+4=18x^2y^2+8$

$18x^2y^2+8$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) 210

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge beachtet werden muss, wobei Wiederholung nicht stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Variation ohne Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Hier gilt: $n=7$ und $k=3$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=7\cdot6\cdot5=210$

210 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: c) $x=2$

Erklärung:

$f(x)=0=\frac{2x^2-x^3}{\sqrt{2x}}$	→ Da nicht durch 0 geteilt werden darf, muss zunächst geprüft werden, wann der Zähler $=0$ ist.
$0=2x^2-x^3$	→ Hier kann x ausgeklammert werden.
$0=x\cdot(2x-x^2)$	→ Wenn hier $x=0$ ist, ist der gesamte Term $=0$. Demnach wäre das eine Nullstelle. Jetzt muss geprüft werden, ob der Nenner des Bruches auch $=0$ ist. Denn dann wäre $=0$ nicht definiert und wäre keine korrekte Antwort.
$\sqrt{2\cdot0}=0$	→ Der Nenner ist bei $x=0$ ebenfalls $=0$, weshalb $x=0$ keine korrekte Antwort ist.
$0=x\cdot(2-x)$	→ x kann erneut ausgeklammert werden.
$0=2-x$	$\vert +x$

$x = 2$ → Nenner prüfen.

$\sqrt{2 \cdot 2} = 2$ → Nenner ist nicht $= 0$ bei $x = 2$.

$x = 2$ ist die einzige richtige Antwort.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: b) $\frac{126}{495}$

Erklärung:

Zuerst berechnen wir die gesamte Anzahl an möglichen Mitarbeiterkombinationen. Dazu nutzen wir die Kombinatorik:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 495$$

Als nächstes berechnen wir die Anzahl an möglichen Kombinationen von Mitarbeitern aus der Entwicklung und aus dem Marketing, die jeweils ausgewählt werden können.

Entwicklung: $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

Entwicklung: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{2!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$

Insgesamt gibt es dementsprechend folgende Anzahl an möglichen Kombinationen von 2 Mitarbeitern aus der Entwicklung und 2 Mitarbeitern aus dem Marketing:

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{4}{2} = 21 \cdot 6 = 126$$

Dementsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit eine solche Auswahl zu treffen:

$$\frac{126}{495}$$

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) 2

Erklärung:

Hier handelt es sich um die 1. und 2. Binomische Formel. Beide Male steht sie ausmultipliziert und unter einer Wurzel. Demnach müssen wir faktorisieren und danach die Wurzel ziehen:

Faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Ziehen wir jeweils die Wurzel:

$\sqrt{(x + 1)^2} = (x + 1)$

$\sqrt{(x - 1)^2} = (x - 1)$

$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = (x + 1) - (x - 1) = x + 1 - x - (-1) = 2$

2 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: c) $\frac{1}{2}$

Erklärung:

Damit die Summe der Zahlen der beiden Karten gerade ist, müssen entweder zweimal gerade Zahlen oder zweimal ungerade Zahlen gezogen werden. Die Hälfte der Karten ist mit einer geraden Zahl nummeriert, die andere Hälfte ist mit einer ungeraden Zahl nummeriert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichartige Karten gezogen werden, beträgt dementsprechend:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Da es zwei Möglichkeiten gibt – gerade und ungerade – müssen wir das noch mal 2 rechnen:

$$\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: b) $F(x) = -\cos(x) + 6x^4 + x^2 + C$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man entweder die gegebene Funktion integrieren oder die Stammfunktionen in den Antwortmöglichkeiten ableiten, wobei es sich hier empfiehlt, zu integrieren.

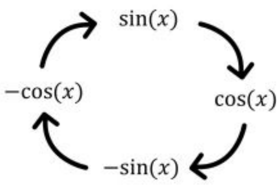
$f(x) = f(x) = \sin(x) + 24x^3 + \ln(e^{2x})$

Zunächst sollten wir die drei Komponenten separat betrachten und einzeln integrieren.

1. $\sin(x)$:

$f(x) = \sin(x)$ integriert, ergibt $F(x) = -\cos(x)$

Das kann man sich gut mithilfe des Ableitungszyklus merken:



Dementsprechend müssen wir das Ganze hier rückwärts betrachten, da wir integrieren.

2. $24x^3$:

Hier integrieren wir wie gewohnt:

$F(x) = \frac{24}{(3+1)} \cdot x^{(3+1)}$

$F(x) = \frac{24}{4} \cdot x^4$

$F(x) = 6 \cdot x^4$

3. $\ln(e^{2x})$:

Hier müssen wir zunächst ein Logarithmusgesetz anwenden, um diesen Ausdruck zu vereinfachen.

Logarithmusgesetz: $\ln(e^a) = a$

Dementsprechend lautet der vereinfachte Ausdruck folgendermaßen:

$\ln(e^{2x}) = 2x$

Jetzt müssen wir noch integrieren.

$F(x) = \frac{2}{(1+1)} \cdot x^{(1+1)}$

$F(x) = \frac{2}{2} \cdot x^2$

$F(x) = x^2$

Jetzt müssen wir nur noch die einzelnen Komponenten zusammenfügen.

1. $-\cos(x)$

2. $6x^4$

3. x^2

$F(x) = -\cos(x) + 6x^4 + x^2$

Zuletzt muss noch die Konstante C addiert werden, da es sich um ein unbestimmtes Integral handelt.

$F(x) = -\cos(x) + 6x^4 + x^2 + C$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: a) 182

Erklärung:

Hier kann es helfen sich die gegebenen Punkte in einer kurzen Skizze einzuzeichnen. Allerdings kann man auch die Werte und Länge der Kanten anhand der Punkte ablesen.

Wir sehen, dass Punkt A und C denselben y-Wert haben und sich nur im x-Wert unterscheiden. Das lässt darauf schließen, dass diese die Grundseite des Dreiecks bilden. Die Differenz der x-Werte beträgt 26, was bedeutet, dass die Grundseite 26 Längeneinheiten lang ist.

Folglich ist Punkt B die Spitze des Dreiecks und hat eine Differenz in der Höhe von 14 Längeneinheiten im Vergleich mit beiden anderen Punkten. Somit wissen wir, dass die Höhe des Dreiecks 14 beträgt.

Nun müssen wir nur noch in die Formel zu Berechnung der Fläche eines Dreiecks einsetzen:

$$Fläche = \frac{1}{2} \cdot Höhe \cdot Grundseite = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 14 = 182$$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: b) $a = 5$

Erklärung:

Wir berechnen das Integral und lösen danach die Gleichung nach a auf.

$$\int_{-1}^{a} (x^2)dx = 42$$

$$\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_{-1}^{a} = 42$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{a} = 42$$

$$\left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_{-1}^{a} = 42$$

$$\frac{1}{3} \cdot a^3 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 = 42$$

$$\frac{1}{3} \cdot a^3 - \frac{1}{3} \cdot -1 = 42$$

$$\frac{1}{3} \cdot a^3 + \frac{1}{3} = 42$$

$$a^3 + 1 = 126$$

$$a^3 = 125$$

$$a = \sqrt[3]{125}$$

$$a = 5$$

Lernset 7

Aufgabe 1

Richtige Lösung: d) 9

Erklärung:

Vektor zwischen den zwei Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 1-7 \\ (-6)-0 \\ (0)-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors:

$$\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9$$

9 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: c) 10.000

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Potenzgesetze:

$$a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$$

$$a^b \cdot a^{-c} = a^{(b-c)}$$

$$(x^a)^b = x^{a\cdot b}$$

$$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$$

Damit wir die einzelnen Faktoren miteinander multiplizieren und somit die Exponenten miteinander verrechnen können, müssen wir im ersten Schritt bei den Potenzen immer die selbe Basis herstellen. Im zweiten Schritt setzen wir diese wieder in den Bruch ein und vereinfachen.

$100^{-2} = (10^2)^{-2} = 10^{2\cdot -2} = 10^{-4}$

$1.000 = 10^3$

$100^3 = (10^2)^3 = 10^{2\cdot 3} = 10^6$

$100^{-1} = (10^2)^{-1} = 10^{2\cdot -1} = 10^{-2}$

$$\frac{10^2 \cdot 100^{-2} \cdot 1.000}{100^3 \cdot 10^{-7} \cdot 100^{-1}} = \frac{10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{10^6 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}} = \frac{10^{2-4+3}}{10^{6-7-2}} = \frac{10^1}{10^{-3}} = 10^{1-(-3)} = 10^4 = 10.000$$

Aufgabe 3

Richtige Lösung: a) $y = -4x + 23$

Erklärung:

Um eine Gerade von Vektorenschreibweise in eine Funktionsgleichung zu übersetzen, bilden wir je Dimension eine Gleichung und lösen das Gleichungssystem, sodass wir die Variable aus der Gerade in Vektorenschreibweise eliminieren.

$\vec{v} = \binom{5}{3} + t \cdot \binom{-1}{4}$

$\binom{x}{y} = \binom{5}{3} + t \cdot \binom{-1}{4}$

$x = 5 - t$

$y = 3 + 4t$

Wir stellen eine Gleichung nach t um und setzen dann für t in der zweiten Gleichung ein. So eliminieren wir diesen Parameter und es bleibt nur x und y übrig.

$x = 5 - t$

$t = -x + 5$

$y = 3 + 4 \cdot (-x + 5)$

$y = 3 - 4x + 20$

$y = -4x + 23$

Aufgabe 4

Richtige Lösung: c) 20 cm

Erklärung:

$Fläche = (Radius)^2 \cdot \pi$

$$Radius = \sqrt{\frac{1.256}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{1.256}{3{,}14}} \approx \sqrt{400} = 20$$

20 cm² ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: d) $\frac{5}{9}$

Erklärung:

Es gibt zwei mögliche Ereignisse, bei denen genau eine schwarze Kugel gezogen wird. Es wird entweder aus der Urne A oder aus Urne B gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass aus der Urne A eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig aus der Urne B keine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt auch $\frac{1}{3}$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass aus der Urne B eine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt $\frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig aus der Urne A keine schwarze Kugel gezogen wird, beträgt auch $\frac{2}{3}$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass nur eine schwarze Kugel gezogen wird, ist also insgesamt $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

$\frac{5}{9}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: a) $(-2, -4, -5)$

Erklärung:

Um zu berechnen, in welchem Punkt die Gerade die Ebene schneidet, müssen wir die Gerade in die Koordinatenform der Ebene einsetzen. Da wir nur einen Parameter in der Geraden haben, können wir danach auflösen und anschließen in die Parameterform der Gerade einsetzen, um den Punkt zu berechnen.

Schritt 1: Gerade in Ebene einsetzen:

$E_1: -7x - 3y + 2z = 16$ $\qquad$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 36 \end{pmatrix}$

$-7 \cdot (4r) - 3 \cdot (-9 - 10r) + 2 \cdot (13 + 36r) = 16$

$-28r + 27 + 30r + 26 + 72r = 16$

$74r + 53 = 16$

$74r = -37$

$r = -\frac{37}{74} = -\frac{1}{2}$

Schritt 2: Parameter-Wert in Gerade einsetzen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -9+5 \\ 13-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $(-2, -4, -5)$

Aufgabe 7

Richtige Lösung: c) 90.000

Erklärung:

Dieser Aufgabe liegt zwar eine 4-Felder-Tafel zu Grunde, jedoch benötigt man für die Lösung keine Tabelle auszufüllen. Wir haben gegeben, dass 12 % der Einwohner offiziell arbeitslos sind, ein viertel von ihnen jedoch inoffiziell einen Beruf auf dem Schwarzmarkt ausübt. Somit sind nur 75 % der offiziell arbeitslosen auch tatsächlich arbeitslos.
Nun müssen wir das noch mit einer absoluten Zahl verrechnen, um das Ergebnis zu berechnen.

$1.000.000 \cdot 0{,}12 = 120.000$

Es gibt 120.000 offiziell arbeitslose Einwohner.

$120.000 \cdot 0{,}75 = 90.000$

90.000 davon sind tatsächlich arbeitslos.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: d) $x = 1$

Erklärung:

Hier muss nach x aufgelöst und umgestellt werden, um den Wert von x herauszufinden. Dazu lösen wir erstmal die Klammer im Nenner auf.

$(3 \cdot \sqrt{x})^2$

Um das auflösen zu können, muss man wissen, dass $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$\left(3 \cdot \sqrt{x}\right)^2 = 9x$

Im nächsten Schritt kürzen wir den Bruch und stellen dann nach x um.

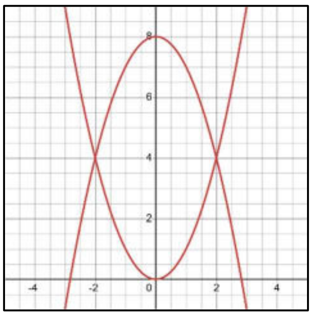
$\frac{18x^2}{(3 \cdot \sqrt{x})^2} = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{18x^2}{9x} = 2 \quad \rightarrow \quad 2x = 2 \quad \rightarrow \quad x = 1$

$x = 1$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 9

Richtige Lösung: c) $\frac{64}{3}$

Erklärung:



Um die Fläche zu berechnen, die von diesen beiden Funktionen eingeschlossen wird, müssen wir zunächst die Schnittpunkt berechnen. Dazu setzen wir die beiden Funktionen gleich.

$-x^2 + 8 = x^2 \qquad | + x^2$

$8 = 2x^2 \qquad | \div 2$

$4 = x^2 \qquad | \sqrt{}$

$x = \pm 2$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

Die Schnittpunkte nutzen wir als Integrationsgrenze.
Da wir die Fläche zwischen den Funktionen berechnen wollen, müssen wir die untere Funktion von der oberen subtrahieren und erhalten unsere Zielfunktion, die wir integrieren. Das tun wir, da wir die Fläche unter der unteren Funktion von der Fläche der oberen Funktion abziehen. In dieser Aufgabe ist es direkt ersichtlich, dass $g(x)$ die untere Funktion ist, da es eine gewöhnliche nach oben geöffnete Parabel ist, während $f(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Demnach rechnen wir:

$$\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 8 \cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 8 \cdot -2\right) = \left(-\frac{2}{3} \cdot 8 + 16\right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot -8 - 16\right)$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 16\right) - \left(\frac{16}{3} - 16\right) = -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = -\frac{32}{3} + 32 = \frac{64}{3}$$

$\frac{64}{3}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: b) 720

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge beachtet werden muss, wobei Wiederholung nicht stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Variation ohne Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\frac{n!}{(n-k)!}$

Hier gilt: $n = 10$ und $k = 3$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

720 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: b) 22,8

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man in möglichst kurzer Zeit möglichst präzise schätzen, was die richtige Antwort ist. Die Antwortmöglichkeiten zu quadrieren ist ohne Taschenrechner unrealistisch. Daher müssen wir mithilfe von Annäherungen arbeiten.

Hier quadrieren wir 23 als erstes, da es zwei Antwortmöglichkeiten gibt, die sehr nah an dieser Zahl liegen und es sich mit ganzen Zahlen am besten rechnen lässt.

$23 \cdot 23 = 529 > 518$

Wir können also schon mal ausschließen, dass das Ergebnis 23,1 ist.

Als nächstes quadrieren wir 22,5 approximativ. Zahlen, die auf ,5 enden können wir sehr gut approximativ quadrieren, indem wir die nächste ganze Zahl darüber und darunter miteinander multiplizieren.

In diesem Fall: $22 \cdot 23 = 506$. Das Ergebnis ist deutlich unter 518, was bedeutet, dass unsere gesuchte Zahl über 22,5 liegen muss. Damit können wir 22,2 und 22,5 als Lösung ausschließen.

Die richtige Antwort ist 22,8.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: b) $x_w = 1$

Erklärung:

Um herauszufinden, wo die Funktion ihre Wendestelle hat, müssen wir die 2. Ableitung errechnen:

$f(x) = 5x^3 - \frac{15}{x^{-2}} + 25x - 50 = 5x^3 - 25x^2 + 25x - 50$

$f'(x) = 15x^2 - 30x - 25$

$f''(x) = 30x - 30$

Jetzt müssen wir die 2. Ableitung $= 0$ setzen und x ausrechnen.

$f''(x) = 30x - 30 = 0$

$30x - 30 = 0 \qquad |+30$

$30x = 30 \qquad |\div 30$

$x_w = 1$

$x_w = 1$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: d) $x = 0$

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, brauchst Du folgendes Potenzgesetz:

$a^0 = 1$

$f(x) = 1 = \frac{2x^2+1}{2e^x-1} \quad |\cdot (2e^x - 1)$

$2e^x - 1 = 2x^2 + 1 \quad |+1$

$2e^x = 2x^2 + 2 \quad |\div 2$

$e^x = x^2 + 1$ → Ab hier muss man einsetzen, es sei denn, man weiß, dass $e^0 = 1$ ist.

$e^0 = 0^2 + 1$

$1 = 1$ → $f(0) = 1$

$x = 0$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: a) $4x - y - 3z = 15$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob zwei Ebenen parallel zueinander liegen, ist der schnellste weg, zu prüfen, ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen kollinear sind. Der Normalenvektor zeigt senkrecht auf die Ebene und wenn zwei Ebenen parallel zueinander liegen, dann sind die Normalenvektoren kollinear bzw. ein Vielfaches voneinander.

Da wir in den Antwortmöglichkeiten nur Ebenengleichungen in Koordinatenform gegeben haben, aus denen man den Normalenvektor direkt ablesen kann, müssen wir nur noch den Normalenvektor der Ebene E_1 berechnen und vergleichen.

Normalenvektor von E_1:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 8 \\ 8 - 6 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss nur noch geprüft werden, zu welchem Normalenvektor dieser kollinear ist.

a) $4x - y - 3z = 15$

Hier können wir den Normalenvektor ablesen: $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Kollinearität prüfen: $\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$-8x = 4 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$2x = -1 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$6x = -3 \qquad x = -\frac{1}{2}$

Der Normalenvektor ist ein Vielfaches des Normalenvektors von E_1 und somit liegen die Ebenen parallel zueinander.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: c) $f(y) = 9y + 4$

Erklärung:

Um diese Aufgabe möglichst schnell und einfach zu lösen sollte man hier im ersten Schritt den Term unter der Klammer faktorisieren. Dazu muss man ein geschultes Auge für binomische Formeln haben, das kann einem hier jedoch viel Zeit sparen.

Bevor wir für x einsetzen, schauen wir uns $f(x)$ genau an:

$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$

Wir sehen unter der Klammer einen Term, der auf die Struktur der 1. Binomischen Formel schließen lässt. 9 und 1 sind beides Quadratzahlen.

Wenn $9x^2 = a^2$, dann gilt $a = 3x$ und wenn $1 = b^2$, dann gilt $b = 1$.

Demnach wäre dann $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ → Das passt perfekt zu der $6x$ im Term. Demnach liegt hier die 1. Binomische Formel vor. Das heißt, dass wir diese Ausklammern und mit der Wurzel verrechnen können.

$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = \sqrt{(3x-1)^2} = (3x - 1) = 3x - 1$

Jetzt ist das Einsetzen und vereinfachen deutlich einfacher.

$f(y) = (3 \cdot (3y - 1) - 1) = 9y - 3 - 1 = 9y - 4$

$f(y) = 9y - 4$ ist die richtige Antwort.

Lösungsweg, wenn zuerst eingesetzt wird:

$f(y) = \sqrt{9 \cdot (3y + 1)^2 + 6 \cdot (3y + 1) + 1}$

Hier muss zum Ausmultiplizieren die 2. Binomische Formel angewendet werden.

$f(y) = \sqrt{9 \cdot (9y^2 + 6y + 1) + 18y + 6 + 1}$

$f(y) = \sqrt{81y^2 + 54y + 9 + 18y + 7}$

$f(y) = \sqrt{81y^2 + 72y + 16}$

Hier ist zu erkennen, dass 81 und 16 Quadratzahlen sind. Also ist zu prüfen, ob es sich um eine binomische Formel handelt:

$a^2 = 81y^2$ → $a = 9y$

$b^2 = 16$ → $b = 4$

$2ab = 2 \cdot 9 \cdot 4 = 72$

Hier liegt die 1. Binomische Formel vor. Demnach muss ausgeklammert werden.

$f(y) = \sqrt{81y^2 + 72y + 16} = \sqrt{(9y + 4)^2} = 9y + 4$

Aufgabe 16

Richtige Lösung: c) Graph C

Erklärung:

Die vorliegende Funktion bildet eine Parabel ab. Das liegt an dem quadrierten x.
Bei einer solchen Parabel gibt es 3 Kriterien, mit denen wir sicher zum richtigen Ergebnis kommen.

1. Den Y-Achsen-Schnittpunkt
2. Ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist
3. Ob die Parabel auf der X-Achse nach links oder rechts verschoben ist

Alle Graphen haben den selben Y-Achsen-Schnittpunkt, weshalb wir mithilfe dieses Kriteriums noch keine Antwortmöglichkeit ausschließen können.

$f(x) = (x-1)^2 - 6$

Mit Blick auf die Funktion sehen wir, dass die Potenz ein positives Vorzeichen hat, was bedeutet, dass die Parabel nach oben geöffnet ist.
Somit können wir Antwortmöglichkeit b) und d) ausschließen.

Zuletzt müssen wir prüfen, inwiefern die Parabel auf der X-Achse verschoben ist.

Da in der Klammer eine 1 subtrahiert wird, wissen wir, dass die Parabel auf der X-Achse nach rechts verschoben ist. Somit können wir auch Antwortmöglichkeit a) ausschließen.

Graph C ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: a) $\frac{8}{125}$

Erklärung:

Es sind $\frac{45}{3} = 15$ Stellplatznummern durch 3 teilbar und $\frac{45}{10} \approx 4$ Stellplatznummern sind durch 10 teilbar. Durch 3 und durch 10 teilbar ist nur eine Stellplatznummer, und zwar die Nummer 30. Dementsprechend sind $15 + 4 - 1 = 18$ Stellplätze durch 3 oder 10 teilbar.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer eines einzelnen Parktickets durch 3 oder 10 teilbar ist, beträgt also $\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$.

Da wir dreimal hintereinander ein Parkticket ziehen und direkt wieder zurücklegen, berechnen wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgendermaßen:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$$

$\frac{18}{45}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: d) $(-1{,}1)$

Erklärung:

Um die Schnittpunkte herauszufinden, muss man zunächst die beiden Funktionen miteinander gleichsetzen und nach x auflösen.

$x^2 = -(x+2)^2 + 2 \qquad |T$

$x^2 = -x^2 - 4x - 4 + 2 \qquad |T$

$x^2 = -x^2 - 4x - 2 \qquad |-x^2$

$0 = -2x^2 - 4x - 2 \qquad |\cdot -\frac{1}{2}$

$0 = x^2 + 2x + 1 \qquad |pq - Formel$

$p = 2 \quad q = 1$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 1} = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1 \pm 0 = -1$$

Es gibt nur einen Schnittpunkt. Dieser liegt bei $x = -1$. Jetzt müssen wir nur noch in eine der beiden Funktionen einsetzen und den zugehörigen y-Wert berechnen.

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

Der Schnittpunkt liegt bei $(-1{,}1)$.

Für diese Gleichung gibt es keine Lösung, da wir keine Wurzel aus negativen Werten ziehen können. Daher schlussfolgern wir, dass sich die beiden Funktionen nicht schneiden.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: b) 472,5 km

Erklärung:

Zunächst summieren wir die fünf Strecken und teilen sie anschließend durch 10, da wir durch die Anzahl 5 teilen müssen, als auch den nur halb gefüllten Tank beachten:

$$1.020 + 963 + 953 + 902 + 887 = 4.725$$

$$\frac{4.725}{5 \cdot 2} = \frac{4.725}{10} = 472{,}5$$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) $-\frac{1}{2}$

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgendes Wissen über den $\ln()$:

$$e^{\ln\,(\mathrm{a})} = a$$

$$\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln\,(\mathrm{a})$$

$$\ln(e) = 1$$

Und folgendes Potenzgesetz:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\ln\left(\frac{e^3 \cdot \sqrt{e}}{e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}}}\right) - \ln\left(\frac{e^5}{e^3 \cdot \sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{e^3 \cdot e^{\frac{1}{2}}}{e^2 \cdot e^{\frac{1}{2}}}\right) - \ln\left(\frac{e^5}{e^3 \cdot e^{\frac{1}{2}}}\right) = \ln\left(\frac{e^3}{e^2}\right) - \ln\left(e^{5-3-\frac{1}{2}}\right)$$

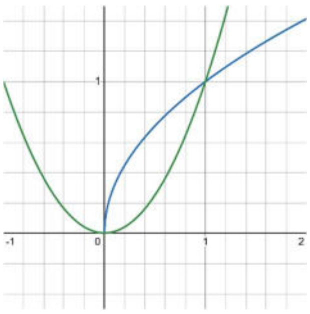
$$= \ln(e) - \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \ln(e) = 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Lernset 8

Aufgabe 1

Richtige Lösung: d) $\frac{1}{3}$

Erklärung:



Um die Fläche zu berechnen, die von diesen beiden Funktionen eingeschlossen wird, müssen wir zunächst die Schnittpunkt berechnen. Dazu setzen wir die beiden Funktionen gleich.

$\sqrt{x} = x^2 \qquad |(\quad)^2$

$x = x^4 \qquad | - x$

$0 = x^4 - x \qquad |Ausklammern$

$0 = x \cdot (x^3 - 1)$

$x_1 = 0$

$0 = x^3 - 1 \qquad | + 1$

$1 = x^3 \qquad |\sqrt[3]{\quad}$

$x_2 = 1$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

Die Schnittpunkte nutzen wir als Integrationsgrenze.
Da wir die Fläche zwischen den Funktionen berechnen wollen, müssen wir die untere Funktion von der oberen subtrahieren und erhalten unsere Zielfunktion, die wir integrieren. Das tun wir, da wir die Fläche unter der unteren Funktion von der Fläche der oberen Funktion abziehen. Mit dem Wissen, dass die Parabelfunktion konvex und die Wurzelfunktion konkav verlaufen, ist klar, dass $g(x)$ die untere Funktion ist, während $f(x)$ die obere Funktion ist.

Demnach rechnen wir:

$$\int_0^1 f(x) - g(x)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1)^3\right) - \left(\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot(0)^3\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}1\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 0\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: b) 7 cm

Erklärung:

Der Würfel hat 6 Seiten, daher multiplizieren wir die quadrierte Kantenlänge mit 6.

Formel: $Oberfläche = 6 \cdot (Kantenlänge)^2$

Hier wollen wir reverse-engineeren, das bedeutet, wir müssen die Formel nach der Kantenlänge umstellen.

$$Kantenlänge = \sqrt{\frac{Oberfläche}{6}}$$

$$Kantenlänge = \sqrt{\frac{294}{6}} = \sqrt{49} = 7$$

7 cm ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: a) $x > 2$ oder $x < -2$

Erklärung:

Hier ist es entscheidend zu wissen, dass der ln nur für positive Werte definiert ist. Weder 0, noch negative Werte können in den ln eingesetzt werden.

Daher müssen wir folgende Ungleichung aufstellen:

$x^2 - 4 > 0 \qquad | + 4$

$x^2 > 4 \qquad |\sqrt{\ }$

$x > \pm 2$

$x > 2$ oder $x < -2$

Aufgabe 4

Richtige Lösung: c) $x = -1 + \sqrt{3}$

Erklärung:

$\sqrt{2x+6} = x + 2 \qquad |()^2$

$2x + 6 = (x+2)^2 \qquad |Ausmultipizieren$

$2x + 6 = x^2 + 4x + 4 \qquad |-(2x+6)$

$0 = x^2 + 2x - 2 \qquad |pq - Formel$

$p = 2 \qquad q = -2$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-2)} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3} = -1 \pm 3$$

$x = -1 + \sqrt{3}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: d) $2e^3 + e^2 - 4e + 2$

Erklärung:

$$\int_1^e \left(6x^2 + 2x - 4 + \frac{1}{x}\right) dx = [2x^3 + x^2 - 4x + \ln|x|]_1^e$$

$$= (2e^3 + e^2 - 4e + \ln(e)) - (2 \cdot (1)^3 + (1)^2 - 4 \cdot (1) + \ln(1))$$

$$= (2e^3 + e^2 - 4e + 1) - (2 + 1 - 4 + 0)$$

$$= 2e^3 + e^2 - 4e + 1 - 2 - 1 + 4$$

$$= 2e^3 + e^2 - 4e + 2$$

Aufgabe 6

Richtige Lösung: c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Schritt 1: E_2 in E_1 einsetzen:

$E_1: -x + 4y - z = 12$ $\qquad$ $E_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-1 \cdot (3 + 6s) + 4 \cdot (3 + t) - 1 \cdot (-3 + 4s) = 12$

$-3 - 6s + 12 + 4t + 3 - 4s = 12$

$-10s + 4t + 12 = 12$

$-10s + 4t = 0$

$4t = 10s$

$t = \frac{5}{2}s$

Schritt 2: t in s ausgedrückt in E_2 einsetzen:

Wir wissen, dass $t = 2{,}5s$ gilt. Da wir nun die Gerade berechnen wollen, setzen wir in E_2 für t ein und erhalten dann eine Gerade, da wir nur einen Parameter darin enthalten haben. Diese Vereinfachen wir noch und erhalten dann die Schnittgerade in Parameterform.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(\frac{5}{2}s\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6s \\ 0 \\ 4s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6s \\ 2{,}5s \\ 4s \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Richtige Lösung: b) 2

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, brauchst du folgendes Wurzelgesetz:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$$\frac{\sqrt{45} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(3-1) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3 - 1 = 2$$

2 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: a) $\frac{2x+x}{y^2-1}$

Erklärung:

Wir wollen beide Brüche auf den selben Nenner bringen, um sie miteinander verrechnen zu können. Dazu müssen wir von dem mittleren Bruch die Wurzel ziehen. Der dritte Bruch bedarf etwas mehr Überlegung. Hier können wir mit genügend Übung erkennen, dass wir den Bruch mithilfe der 3. Binomischen Formel auf den selben Nenner bringen können, wie die anderen Brüche indem wir ihn mit $y - 1$ multiplizieren.

$$\frac{x}{y^2-1} + \frac{4x^2}{(y^2-1)^2} + \frac{x}{y+1} = \frac{x}{y^2-1} + \sqrt{\frac{4x^2}{(y^2-1)^2}} + \frac{x}{y+1}$$

$$= \frac{x}{y^2-1} + \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{(y^2-1)^2}} + \frac{x}{y+1} = \frac{x}{y^2-1} + \frac{2x}{y^2-1} + \frac{x}{y+1}$$

$$= \frac{x}{y^2-1} + \frac{2x}{y^2-1} + \frac{x \cdot (y-1)}{(y+1) \cdot (y-1)} = \frac{x}{y^2-1} + \frac{2x}{y^2-1} + \frac{xy - x}{y^2-1}$$

$$= \frac{x + 2x + xy - x}{y^2-1} = \frac{2x + xy}{y^2-1}$$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: b) 2

Erklärung:

Wir schreiben den Zähler in einer anderen Reihenfolge auf, um es etwas übersichtlicher zu machen und dann klammern wir aus. Anschließend kürzen wir den Bruch und erhalten unser Ergebnis:

$$\frac{12x+6}{3+6x} = \frac{6+12x}{3+6x} = \frac{6\cdot(1+2x)}{3\cdot(1+2x)} = \frac{6}{3} = 2$$

Aufgabe 10

Richtige Lösung: d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 90 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man die möglichen Antworten ausrechnen und mit dem gegebenen Vektor vergleichen.

$$\begin{pmatrix} 90 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9\cdot -9 \\ 9\cdot 1 \\ 9\cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -81 \\ 9 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 90 \\ 12 \\ 41 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11

Richtige Lösung: d) $a = 2$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zunächst die Bedingung aufstellen und dann die Variable k berechnen.

Die Bedingung erhalten wir, indem wir die erste Ableitung $= 0$ setzen und den gegebenen x-Wert einsetzen, da wir eine Extremstelle suchen.

$f(x) = 5x^a - 20x + 3$

$f'(x) = 5ax^{a-1} - 20$

$f'(2) = 5a \cdot (2)^{a-1} - 20 = 0 \qquad |+20$

$5a \cdot (2)^{a-1} = +20 \qquad |\div 5$

$a \cdot (2)^{a-1} = 4$

$a \cdot (2)^{a} \cdot (2)^{-1} = 4$

$a \cdot (2)^{a} \cdot \frac{1}{2} = 4 \qquad |\cdot 2$

$a \cdot (2)^{a} = 8$

Ab hier empfiehlt es sich einzusetzen, denn das Ergebnis ist mit 8 relativ gering.

Setzt man für a 2 ein, ergibt sich die Lösung.

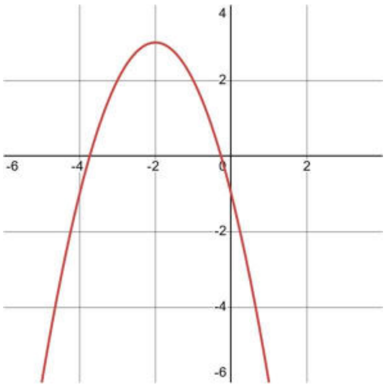
$2 \cdot (2)^{2} = 8$

$a = 2$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: a) Keine Symmetrie

Erklärung:



Funktionen, deren höchster Exponent gerade ist, wie hier, können ausschließlich achsensymmetrisch sein. Um achsensymmetrisch zu sein, muss die Parabel hier jedoch ihren Extrempunkt auf der Y-Achse haben. In dieser Aufgabe ist dies nicht der Fall, da die Parabel entlang der X-Achse um 2 nach links verschoben ist, da in der quadrierten Klammer eine 2 addiert wird. Somit können wir hier mit Sicherheit ausschließen, dass dieser Graph achsensymmetrisch ist, was bedeutet, dass gar keine Symmetrie vorliegt.

Keine Symmetrie ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: c) $\frac{14}{15}$

Erklärung:

Hier müssen wir die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnen, dass gar keine rote Murmel gezogen wird und für das Ereignis, dass nur eine rote Murmel gezogen wird. Addieren wir diese beiden Wahrscheinlichkeiten, erhalten wir die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass maximal eine rote Murmel gezogen wird.

Keine rote Kugel:

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Eine rote Kugel:

Es gibt 3 verschiedene Reihenfolgen in denen nur eine rote Murmel gezogen werden kann, weshalb wir die Wahrscheinlichkeit hier mit 3 multiplizieren müssen.

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{45}$$

$$\frac{7}{45} \cdot 3 = \frac{7}{15}$$

$$\frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass maximal eine rote Murmel gezogen wird, beträgt $\frac{14}{15}$.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: c) 99,5%

Erklärung:

Hier muss mit der Gegenwahrscheinlichkeit gearbeitet werden. Wir rechnen 1- (die Wahrscheinlichkeit, dass kein System funktioniert)

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein System funktioniert, wird folgendermaßen berechnet:

$$(1 - 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein System funktioniert, wird folgendermaßen berechnet:

$1 - 0{,}005 = 0{,}995 = 99{,}5\%$

$99{,}5\%$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: b) $\frac{1}{2}$

Erklärung:

Insgesamt gibt es $2^3 = 8$ mögliche Anordnungen von geraden und ungeraden Zahlen. Das lässt sich mit einer Variation mit Wiederholung berechnen, da wir die binäre Variable gerade bzw. ungerade haben und insgesamt 3 mal gezogen wird.

Es gibt folgende mögliche Kombinationen von Zahlen:

3 gerade Zahlen: Es gibt 1 Anordnungsmöglichkeit und die Summe ist gerade.

3 ungerade Zahlen: Es gibt 1 Anordnungsmöglichkeit und die Summe ist ungerade.

1 gerade und 2 ungerade Zahl: Es gibt $\frac{3!}{(3-1)!} = 3$ Anordnungsmöglichkeit und die Summe ist gerade.

2 gerade und 1 ungerade Zahl: Es gibt $\frac{3!}{(3-1)!} = 3$ Anordnungsmöglichkeit und die Summe ist ungerade.

Die Hälfte der möglichen Anordnungen von Zahlen ist gerade und die Hälfte ist ungerade.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der drei Zahlen ungerade ist, beträgt also:

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) $(21{,}75{,}87)$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob sich zwei Geraden im Vektorraum schneiden, setzen wir sie gleich und bilden für jede Dimension jeweils eine Gleichung, mithilfe derer wir die Werte der Parameter im Schnittpunkt ermitteln, sofern einer vorliegt. Liegt ein Schnittpunkt vor, setzen wir die Werte der Parameter in die Gerade ein und erhalten den Schnittpunkt.

Schritt 1: Gleichsetzen, Gleichungen bilden & Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix}-3\\57\\81\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\69\\107\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\-5\end{pmatrix}$$

Drei Gleichungen:

I. $-3+8s=21$

II. $57+6s=69+1{,}5t$

III. $81+2s=107-5t$

I.: $-3+8s=21 \quad |+3$

$8s=24 \quad |\div 8$

$s=3$

Nun setzen wir ein, um den Wert von s zu erhalten:

III.: $81+2\cdot(3)=107-5t$

$87=107-5t \quad |+5t \quad |-87$

$5t=20 \quad |\div 5$

$t=4$

Schritt 2: Parameter-Werte in Geraden einsetzen und Punkt ausrechnen:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\57\\81\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\57\\81\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24\\18\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+24\\57+18\\81+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\75\\87\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}21\\69\\107\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\1{,}5\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\69\\107\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\69+6\\107-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\75\\87\end{pmatrix}$$

Bei beiden Geraden erhalten wir den selben Punkt.

Der Schnittpunkt ist (21,75,87)

Aufgabe 17

Richtige Lösung: d) ca. 51 %

Erklärung:

Diese Aufgabe dreht sich um bedingte Wahrscheinlichkeit, was man daran erkennen kann, dass sich die Wahrscheinlichkeit für die Akkuratesse des Prüfverfahrens mit dem Zustand des getesteten Gegenstands ändert.

Wir nennen die fehlerhaften Teile F und die nicht fehlerhaften Teile $\bar{F}$.

Den positiven Test nennen wir P und den negativen Test $\bar{P}$.

Gegeben ist folgendes:

$P(P|F) = 0{,}95$

$P(\bar{P}|\bar{F}) = 0{,}9$

$P(F) = 0{,}1$

$P(\bar{F}) = 0{,}9$

Wir suchen: $P(F|P)$

Bayes-Regel:

$$P(F|P) = \frac{P(P|F) \cdot P(F)}{P(P)}$$

Um $P(F|P)$ zu berechnen, müssen wir nur noch $P(P)$ herausfinden.

$$P(P) = P(P|F) \cdot P(F) + P(P|\bar{F}) \cdot P(\bar{F})$$

$P(P|F) = 0{,}95$

$P(F) = 0{,}1$

$P(\bar{F}) = 0{,}9$

$P(P|\bar{F}) = 1 - P(\bar{P}|\bar{F}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$$P(P) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}09 = 0{,}185$$

Als nächstes setzen wir alle Werte in die Bayes-Formel ein:

$$P(F|P) = \frac{P(P|F) \cdot P(F)}{P(P)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}1}{0{,}185} = \frac{0{,}95}{1{,}85}$$

Wir können ablesen, dass $\frac{0{,}95}{1{,}85}$ leicht über 0,5 sein muss, deshalb ist die einzige Antwortmöglichkeit, die nicht wegfällt d).

$$P(F|P) = \frac{0{,}95}{1{,}85} \approx 51\%$$

Aufgabe 18

Richtige Lösung: c) Die Geraden sind antiparallel zueinander.

Erklärung:

Bei diesen Vektoren kann man schon anhand eines Blicks auf die einzelnen Vorzeichen erkennen, dass es sich wahrscheinlich um antiparallele Vektoren handelt, da bei allen drei Zeilen die Vorzeichen getauscht werden. Somit können die Lagebeziehungen parallel und orthogonal ausgeschlossen werden.

Wir prüfen, ob sie ein Vielfaches voneinander sind und erstellen für jede Dimension eine einzelne Gleichung

$$\begin{pmatrix} \sqrt{144} \\ -15 \\ 23 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} -72 \\ 90 \\ -138 \end{pmatrix}$$

$\sqrt{144} = 12 = \gamma \cdot -72$ → $\gamma = \frac{-72}{12} = -6$

$-15 = \gamma \cdot 90$ → $\gamma = \frac{90}{-15} = -6$

$23 = \gamma \cdot -138$ → $\gamma = \frac{-138}{23} = -6$

Der Wert für den Skalar γ ist in allen drei Zeilen gleich. Somit sind sie kollinear. Da der Skalar ein negatives Vorzeichen hat, verlaufen sie in genau entgegengesetzte Richtungen und sind daher antiparallel.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: b) 1.683

Erklärung:

Damit zwei Ereignisse unabhängig voneinander sind, muss folgendes gelten:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$P(I)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass jemand in der IT-Abteilung arbeitet.

$P(F)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass jemand in einer Führungsposition arbeitet.

Gegeben:

$$P(I) = \frac{248}{6.732}$$

$$P(I \cap F) = \frac{62}{6.732}$$

Gesucht:

Anzahl der Mitarbeiter in einer Führungsposition.

$$P(F) = \frac{P(I \cap F)}{P(I)} = \frac{\frac{62}{6.732}}{\frac{248}{6.732}} = \frac{62}{6.732} \cdot \frac{6.732}{248} = \frac{62}{248} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$0,25 \cdot 6.732 = 1.683$$

1.683 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: b) $Mittelwert = 11,86; Median\ = 18; Modus\ = 7; Spannweite\ = 22$

Erklärung:

Zu den einzelnen Statistiken:

- Der Mittelwert ist der Durchschnitt aller Werte.
- Der Median ist der Wert, der genau in der Mitte der Datenverteilung liegt (wenn die Werte nach Größe sortiert aufgelistet sind).
- Der Modus ist der Wert, der am häufigsten in einem Datensatz vorkommt.

- Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert in der Datenverteilung.

Zur Berechnung:

$$Mittelwert = \frac{7+1+16+23+7+18+11}{7} = \frac{83}{7} = 11 + \frac{6}{7} = 11{,}86$$

$Median$: $(1{,}7{,}7{,}11{,}16{,}18{,}23)$ → Wir können den Median ablesen, da die Anzahl der Werte in der Datenverteilung ungerade ist. Der Median ist 11.

$Modus$: $(1{,}7{,}7{,}11{,}16{,}18{,}23)$ → Der häufigste Wert in dieser Datenverteilung ist 7.

$Spannweite = 23 - 1 = 22$

Die richtige Antwort ist $Mittelwert = 11{,}9; Median\ = 18; Modus\ = 7; Spannweite\ = 22.$

Lernset 9

Aufgabe 1

Richtige Lösung: b) $x = \pm 4$

Erklärung:

Die Summe innerhalb der Betragsstriche muss ungeachtet des Vorzeichens 7 ergeben. Demnach gibt es 2 Gleichungen.

$15 = x^2 - 1 \qquad |+1$

$16 = x^2 \qquad |\sqrt{}$

$x = \pm 4$

$-15 = x^2 - 1 \qquad |+1$

$-14 = x^2 \qquad |Es\ kann\ keine\ Wurzel\ gezogen\ werden.$

$x = \pm 4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: b) $x = 0$

Erklärung:

$f(x) = 0 = \frac{2e^x - 2}{\sqrt{2x+3}}$ □ Da nicht durch 0 geteilt werden darf, muss zunächst geprüft werden, wann der Zähler $= 0$ ist.

$0 = 2e^x - 2 \qquad |+2$

$2 = 2e^x \qquad |\div 2$

$1 = e^x$ □ Ab hier muss man einsetzen, es sei denn, man weiß, dass $e^0 = 1$ ist.

$1 = e^0$

$1 = 1$ □Jetzt muss geprüft werden, ob der Nenner des Bruches auch $= 0$ ist. Denn dann wäre $= 0$ nicht definiert und wäre keine korrekte Antwort.

$\sqrt{2 \cdot 0 + 3} \neq 0$ □ $f(0) = 0$

$x = 0$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: a) $x_{w1} = -1, x_{w2} = -5$

Erklärung:

Um herauszufinden, wo die Funktion ihre Wendestelle hat, müssen wir die 2. Ableitung errechnen:

$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 13x - 7$

$f'(x) = \dfrac{4}{3}x^3 + 12x^2 + 20x + 13$

$f''(x) = 4x^2 - 24x + 20$

Jetzt müssen wir die 2. Ableitung $= 0$ setzen und x ausrechnen.

$f''(x) = 4x^2 - 24x + 20 = 0$

Um hier nach x aufzulösen, müssen wir die pq-Formel oder äquivalente Formeln wie die Mitternachtsformel oder ABC-Formel anwenden. In diesem Beispiel verwenden wir die pq-Formel:

$4x^2 - 24x + 20 = 0 \quad |\div 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad |pq - Formel$

$p = -6$

$q = 5$

$x_{1,2} = \dfrac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-6}{2}\right)^2 - 5}$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 5}$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 5}$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{4}$

$x_{w1} = -3 + 2 = -1$

$x_{w2} = -3 - 2 = -5$

$x_{w1} = -1, x_{w2} = -5$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: d) $f(x) \to 0$

Erklärung:

Hier muss man für x einsetzen und approximieren.

$$f(-\infty) = \frac{1}{-\infty} \approx 0$$

Teilt man 1 durch ∞, ergibt es approximiert 0.

Mathematisch ausgedrückt: $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Somit ist die richtige Antwort $f(x) \to 0$

Aufgabe 5

Richtige Lösung: d) 120

Erklärung:

Hier liegt eine Verkettung (Permutation) vor. Um diese Verkettung von Möglichkeiten zu berechnen, muss man $n!$ ausrechnen. Hier ist $n = 5$, da eine der 6 Hausaugaben definitiv am Anfang erledigt werden muss und so nur die Reihenfolge von den restlichen 5 Hausaufgaben variabel ist. Zu Beginn hat sie 5 mögliche Fächer, die sie als erstes erledigt werden können. Danach gibt es 4 mögliche Fächer für die zweite Hausaufgabe und so weiter. Die Berechnung sieht folgendermaßen aus:
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
120 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: b) 100

Erklärung:

Vektor zwischen den zwei Punkten:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 179 - 239 \\ 128 - 208 \\ 114 - 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors:

$$\sqrt{(-60)^2 + (-80)^2 + (0)^2} = \sqrt{3.600 + 6.400} = \sqrt{10.000} = 100$$

100 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: d) $(-7,1,6)$

Erklärung:

Um zu berechnen, in welchem Punkt die Gerade die Ebene schneidet, müssen wir die Gerade in die Koordinatenform der Ebene einsetzen. Da wir nur einen Parameter in der Geraden haben, können wir danach auflösen und anschließen in die Parameterform der Gerade einsetzen, um den Punkt zu berechnen.

Schritt 1: Gerade in Ebene einsetzen:

$$E_1: 2x + 9y + z = 1 \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot (7 + 42r) + 9 \cdot (2 + 3r) + 1 \cdot (8 + 6r) = 1$$

$$14 + 84r + 18 + 27r + 8 + 6r = 1$$

$$117r + 40 = 1$$

$$117r = -39$$

$$r = -\frac{39}{117} = -\frac{1}{3}$$

Schritt 2: Parameter-Wert in Gerade einsetzen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-14 \\ 2-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $(-7,1,6)$

Aufgabe 8

Richtige Lösung: c) 2

Erklärung:

Um den Abstand des Punktes zur Ebene zu berechnen, müssen wir in folgende Formel einsetzen:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wobei gilt: $P(x_0, y_0, z_0)$ und $E: Ax + By + Cz = D$

Die gegebenen Werte:

$4x - 3y + 12z = 24$

$P(2{,}6{,}5)$

$A = 4, B = -3, C = 12, D = 24$

$x_0 = 2, y_0 = 6, z_0 = 5$

Jetzt setzen wir ein:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 + 12 \cdot (5) - 24|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2}}$$

Wir rechnen separat den Zähler aus:

$|4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 + 12 \cdot (5) - 24| = |8 - 18 + 60 - 24| = |26| = 26$

Wir rechnen separat den Nenner aus:

$\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$

Wieder eingesetzt:

$$d = \frac{26}{13} = 2$$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: a) 80 cm

Erklärung:

Formel:

$Umfang = 2 \cdot Radius \cdot \pi$

Umgestellt: $Radius = \frac{Umfang}{2 \cdot \pi}$

$$Radius = \frac{502}{2\pi} = \frac{251}{\pi} \approx 80$$

80 cm ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: c) 35

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge nicht beachtet wird, wobei Wiederholung stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$ → Binomialkoeffizient

Hier gilt: $n = 5$ und $k = 3$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$

35 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: d) $-2 \leq x \leq 2$ oder $x < -3$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir den Nenner und den Zähler separat betrachten. Da wir möchten, dass der Wert des Ausdrucks ≤ 0 ist, muss entweder nur der Term im Zähler negativ sein und der Term im Nenner positiv, oder der Term im Zähler ist positiv und der Term im Nenner ist negativ. Wären beide positiv oder beide negativ, wäre der Bruch in Gänze nie negativ.

Schritt 1: Zuerst berechnen wir, wann der Zähler negativ und der Nenner positiv sind.

Zähler:

$x^2 - 4 \leq 0 \quad | + 4$

$x^2 \leq 4 \quad |\sqrt{\ }$

$x \leq 2$

$x \geq -2$

Nenner:

Wichtig!: Der Nenner darf nicht 0 werden, da wir nicht durch 0 teilen dürfen!

$x + 3 > 0 \qquad | - 3$

$x > -3$

Da die Bedingung des Zählers mit $x \geq -2$ enger ist, als die Bedingung des Nenners, bleibt es beim vorherigen Ergebnis: $-2 \leq x \leq 2$

Schritt 2: Wir berechnen, wann der Nenner negativ und der Zähler positiv sind.

Zähler:

$x^2 - 4 \geq 0 \qquad | + 4$

$x^2 \geq 4 \qquad |\sqrt{\ }$

$x \geq 2$

$x \leq -2$

Nenner:

Wichtig!: Der Nenner darf nicht 0 werden, da wir nicht durch 0 teilen dürfen!

$x + 3 < 0 \qquad | - 3$

$x < -3$

Betrachten wir die Bedingungen von Nenner und Zähler zusammen, erkennen wir, dass der Zähler positiv und gleichzeitig der Nenner negativ sind, wenn folgendes gegeben ist: $x < -3$

$-2 \leq x \leq 2$ oder $x < -3$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: a) 19 %

Erklärung:

Gegeben: $P(Nasenklammer) = 0{,}07$

$P(Schwimmhaube) = 0{,}12$

$P(Nasenklammer \cap Nasenklammer) = 0$

Gesucht: $P(Nasenklammer \cup Schwimmhaube)$

($Nasenklammer \cup Schwimmhaube$ bedeutet Nasenklammer oder Schwimmhaube)

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass entweder eine Nasenklammer oder eine Schwimmhaube getragen wird. Die Wahrscheinlichkeit für solche Ereignisse berechnet man folgendermaßen:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(Nasenklammer \cup Schwimmhaube) = 0{,}07 + 0{,}12 - 0 = 0{,}19$

19 % der Schwimmer tragen mindestens eines der beiden Hilfsmittel regelmäßig.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: d) Graph D

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe ist eine quadratische Funktionen 2. Grades und eine 3. Grades gegeben. Dementsprechend haben wir eine Parabel und eine kubische Funktion.

Wir schauen uns zunächst $f(x) = -(x-2)^2 + 40$, also die Parabel an. Diese ist in 2 verschiedenen Versionen abgebildet. Einmal mit einer Rechtsverschiebung auf der X-Achse (C und D) und einmal mit einer Linksverschiebung auf der X-Achse (A und B).

In der Funktion ist klar zu erkennen, dass die Parabel nach rechts verschoben ist, da in der Klammer eine 2 subtrahiert wird.
Somit können wir Antwortmöglichkeit a) und b) ausschließen.

Als nächstes schauen wir uns $g(x) = -x^3 + 20$ an.

Die Potenz hat ein negatives Vorzeichen, was bedeutet, dass der Graph bei positiven x-Werten immer weiter ins Negative geht und bei negativen x-Werten immer weiter ins Positive.

Somit können wir Antwortmöglichkeit c) ausschließen.

Graph D ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: a) 48.960

Erklärung:

Die Dichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit einer Variable an, wobei es sich um eine stetige Variable handelt. Daher ist die Dichtefunktion integrierbar.

Wir wollen die gesamte Besucherzahl des Museums anhand dieser Dichtefunktion berechnen. Dazu bilden wir das Integral, welches die sogenannte Verteilungsfunktion darstellt.

$$f(x) = \begin{cases} -2{,}4x^2 + 180 & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -0{,}8x^3 + 180x & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Jetzt müssen wir nur noch die korrekten x-Werte einsetzen. Die Dichtefunktion beschreibt die Besucherzahl des Museums über die Woche hinweg und daher ist die Funktion auf $0 \leq x \leq 7$ beschränkt.

Uns interessiert der Verbrauch zwischen dem 1. und dem 4. Wochentag, also von $x = 1$ bis $x = 4$. Demnach setzen wir diese Werte in das Integral ein und rechnen die gesamte Nutzung aus.

$$\int_1^4 (-2{,}4x^2 + 180)dx = [-0{,}8x^3 + 180x]_1^4$$
$$= (-0{,}8 \cdot 4^3 + 180 \cdot 4) - (-0{,}8 \cdot 1^3 + 180 \cdot 1)$$

$$= (-0{,}8 \cdot 64 + 720) - (-0{,}8 + 180) = (-51{,}2 + 720) - (179{,}2)$$

$$= 668{,}8 - 179{,}2 = 489{,}6$$

Da jede Einheit 100 Besuchern entspricht müssen wir noch folgendermaßen rechnen:

$489{,}6 * 100 = 48.960$ [Besucher]

Aufgabe 15

Richtige Lösung: b) 17,2

Erklärung:

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung von Werten. Je höher, desto größer die Streuung. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

Demnach berechnen wir immer zuerst den Durchschnittswert ($\bar{x}$) und anschließend die Varianz.

Wohnungsnummer	1	2	3	4	5
Quadratmeterpreis	15	18	21	25	26

$$\bar{x}=\frac{15+18+21+25+26}{5}=\frac{105}{5}=21$$

$$Var(x)=\frac{(15-21)^2+(18-21)^2+(21-21)^2+(25-21)^2+(26-21)^2}{5}$$

$$Var(x)=\frac{(-6)^2+(-3)^2+(0)^2+(4)^2+(5)^2}{5}=\frac{36+9+0+16+25}{5}=\frac{86}{5}$$

$$Var(x)=\frac{85}{5}+\frac{1}{5}=17+0{,}2=17{,}2$$

Die Varianz der Arbeitnehmerzahl beträgt 17,2.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) $f(x)=\frac{3}{4}x^5-\frac{17}{2}x^4+x+e$

Erklärung:

$$f'(x)=\frac{15}{4}x^4-34x^3+1$$

$$f(x)=\frac{1}{4+1}\cdot\frac{15}{4}x^{4+1}-\frac{34x^{3+1}}{3+1}+x+C=\frac{15}{4\cdot 5}x^5-\frac{34x^4}{4}+x+C=\frac{3}{4}x^5-\frac{17}{2}x^4+x+C$$

C kann eine beliebige Konstante sein. In diesem Beispiel ist es bei der richtigen Lösung (d)) die Konstante e.

$f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{17}{2}x^4 + x + e$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: c) $\sqrt{q} \cdot r$

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, brauchst du folgende Wurzelgesetze:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{a} \cdot b = \sqrt{a \cdot b^2}$$

$$\frac{p \cdot \sqrt{q^2 \cdot r^3}}{\sqrt{p^2 \cdot q \cdot r}} = \frac{\sqrt{p^2} \cdot \sqrt{q^2 \cdot r^3}}{\sqrt{p^2 \cdot q \cdot r}} = \frac{\sqrt{p^2 \cdot q^2 \cdot r^3}}{\sqrt{p^2 \cdot q \cdot r}} = \sqrt{\frac{p^2 \cdot q^2 \cdot r^3}{p^2 \cdot q \cdot r}} = \sqrt{\frac{q^2 \cdot r^3}{q \cdot r}} = \sqrt{\frac{q \cdot r^3}{r}} = \sqrt{q \cdot r^2}$$
$$= \sqrt{q} \cdot r$$

$\sqrt{q} \cdot r$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$

Erklärung:

Die generalisierte Form einer quadratischen Funktion 3. Grades ist $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Wir kennen bereits die Variable $a = 2$.

In der Aufgabenstellung ist uns gegeben, dass die Funktion durch die Punkte $A(-1/2)$ und $B(0/-5)$, wobei A ein Extrempunkt ist. Dadurch haben wir folgende drei Informationen:

$f(-1) = 2$

$f'(-1) = 0$

$f(0) = -5$

Das Zweite können wir schlussfolgern, da wir wissen, dass im Extrempunkt die Steigung immer 0 ist.

Demnach müssen wir nur noch einsetzen und nach den Variablen auflösen:

$f(0) = -5 = 2 \cdot (0)^3 + b \cdot (0)^2 + c \cdot (0) + d$

$f(0) = -5 = d$

$f'(-1) = 0 = 6 \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 6 - 2b + c$

$-6 = -2b + c$

$6 = 2b - c$

$f(-1) = 2 = 2 \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) - 5$

$2 = -2 + b - c - 5$

$2 = -7 + b - c$

$9 = b - c$

$b = 9 + c$

Das setzen wir in die obige Gleichung ein:

$6 = 2 \cdot (9 + c) - c$

$6 = 18 + 2c - c$

$6 = 18 + c$

$c = -12$

Den Wert für c setzen wir in die vorherige Gleichung ein, um den Wert von b zu ermitteln:

$b = 9 - 12 = -3$

$b = -3$

Die vollständige quadratische Funktionsgleichung lautet demnach $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 5$

Aufgabe 19

Richtige Lösung: a) $p = 7$

Erklärung:

Bei einer solchen Aufgabe versuchen wir nach und nach Variablen zu eliminieren, bis wir den Wert der gesuchten Variable erhalten.

I. $-2s = p - r + q$
II. $5q = p + r$
III. $3p = r + s$
IV. $4s = p + q$
V. $2r = 4s + 24$

Wir müssen Gleichungen mit den selben Variablen finden oder erstellen, um sie miteinander zu verrechnen. Die gesuchte Variable muss natürlich dabei sein, denn es ist der zeiteffizienteste Ansatz direkt den Wert der gesuchten Variable zu berechnen.

Schritt 1: IV. in I. einsetzen:

IV.: $4s = p + q$

I.: $-2s = p - r + q = p + q - r$

IV. in I.: $-2s = 4s - r$

VI.: $r = 6s$

Schritt 2: VI. in V. einsetzen:

V.: $2r = 4s + 24$

VI.: $r = 6s$

VI. in V.: $2 \cdot 6s = 4s + 24$

$12s - 4s = 24$

$8s = 24$

$s = 3$

Schritt 3: Wert für s in VI. einsetzen, um den Wert für r zu erhalten:

VI.: $r = 6s$

$r = 6 \cdot 3 = 18$

Jetzt wollen wir den Wert für p ermitteln. Allerdings haben wir immer p und q zusammen in den Gleichungen. Daher stellen wir I. und IV. jeweils nach q um und setzen diese Gleichungen dann gleich. Somit haben wir die Variable q eliminiert und so können den Wert von p berechnen.

Schritt 4: Werte für s und r in III. einsetzen:

III.: $3p = r + s$

$3p = 18 + 3$

$3p = 21$

$p = 7$

$p = 7$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: a) $\frac{248}{663}$

Erklärung:

Es gibt im ganzen Set insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ Karten mit einer geraden Zahl darauf und demnach 32 Karten, die keine gerade Zahl haben. Die Wahrscheinlichkeit zweimal keine dieser Karten zu ziehen, wenn nicht zurückgelegt wird, beträgt:

$$\frac{32}{52} \cdot \frac{31}{51} = \frac{8}{13} \cdot \frac{31}{51} = \frac{248}{663}$$

$\frac{248}{663}$ ist die richtige Antwort.

Lernset 10

Aufgabe 1

Richtige Lösung: d) $6 + 8a - 12b$

Erklärung:

Wir lösen zunächst alle Klammern auf, sodass jede Komponente mit dem entsprechenden Vorzeichen alleine für sich steht und verrechnen sie dann im Anschluss miteinander.

$$6 - [2a + 3b - (4a - b)] + 2(3a - 4b) = 6 - 2a - 3b + (4a - b) + 2(3a - 4b)$$

$$= 6 - 2a - 3b + 4a - b + 2(3a - 4b) \; = 6 - 2a - 3b + 4a - b + 6a - 8b$$

$$= 6 - 2a + 4a + 6a - 3b - b - 8b = 6 + 8a - 12b$$

$6 + 8a - 12b$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: a) $D(3/5)$

Erklärung:

Damit es ein symmetrisches Trapez ergibt, muss Punkt D auf der selben „Höhe“, also y-Koordinate sein, wie $C(5/5)$. So ist sichergestellt, dass es zwei parallele Geraden gibt. Nun muss noch die x-Koordinate bestimmt werden. Dazu schauen wir uns den Abstand zwischen B und C hinsichtlich der x-Koordinate an.

$x_B - x_C = 7 - 5 = 2$

Nun muss D den selben Abstand von 2 zu A haben.

$x_D = x_A + 2 = 1 + 2 = 3$

Der Punkt D ist also $(3/5)$.

$D(3/5)$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: d) 36

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge nicht beachtet wird, wobei Wiederholung nicht stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Kombination ohne Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ → Binomialkoeffizient

Hier gilt: $n = 9$ und $k = 2$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\binom{8}{2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36$

36 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: d) $-x - 2y - z = -21$

Erklärung:

Hier müssen wir zunächst die Ebene in Parameterform aufstellen und dann den Normalenvektor berechnen, um mithilfe dessen die Koordinatenform der Ebene zu bestimmen.

Wir nehmen an, dass A unser Stützvektor ist. Demnach sind die Richtungs- bzw. Spannvektoren der Ebene $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Dann berechnen wir das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren um mithilfe dessen die Koordinatenform aufzustellen.

Schritt 1: Parameterform aufstellen:

Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parameterform:

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Koordinatenform aufstellen:

Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ -6 - 2 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor kann skaliert werden, um die Rechnung zu vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen und Stützvektor einsetzen:

$$-x - 2y - z = ?$$

$$-0 - 2 \cdot 16 - (-11) = -32 + 11 = -21$$

$$-x - 2y - z = -21$$

Aufgabe 5

Richtige Lösung: c) $\frac{4}{7}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen müssen wir zunächst die Summen der Zeilen und Spalten bilden.

Leistungskurs	Mathematik	Deutsch	Englisch	Biologie	∑
Notendurchschnitt ≤ 2,0	215	213	185	87	700
Notendurchschnitt > 2,0	81	96	103	220	500
∑	296	309	288	307	1.200

Für unsere Rechnung sind die grün markierten Zellen in der Tabelle relevant. Um zu berechnen, wie hoch der Anteil der Schüler mit Mathematik oder Englisch Leistungskurs, unt der den Schülern mit einen Notenschnitt von 2,0 oder besser ist, müssen wir die absolute Anzahl der Schüler mit dem entsprechenden Notenschnitt aus den Leistungskursen Mathematik und Englisch berechnen und diese mit der gesamten Anzahl an Schülern mit einem Notenschnitt von 2,0 oder besser in Beziehung setzen.

$$\frac{215 + 185}{700} = \frac{400}{700}$$

Dann muss der Bruch noch so weit wie möglich gekürzt werden.

$$\frac{400}{700} = \frac{4}{7}$$

$\frac{4}{7}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: a) $= 6x$

Erklärung:

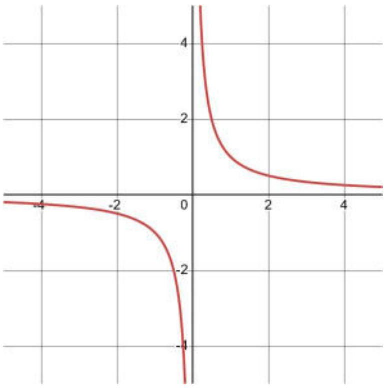
$$f(x) = \frac{(9x)^2}{3 \cdot (9x)} + \frac{9x}{3} = \frac{9x \cdot 9x}{3 \cdot 9x} + 3x = \frac{9x}{3} + 3x = 3x + 3x = 6x$$

$= 6x$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: c) Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

Erklärung:



Diese Funktion ist sehr einzigartig und daher ist es von Vorteil ungefähr zu wissen, wie sie verläuft. Falls man den Verlauf der Funktion nicht vor Augen hat, kann man immer noch rechnerisch prüfen, ob die Funktion achsen- oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Da wir hier keine Konstante haben, ist die Punktsymmetrie zu einem anderen Punkt, als dem Koordinatenursprung auszuschließen.

Rechnerisch prüfen:

Bedingung für Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

Bedingung für Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
(Gilt nur für Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Nun wenden wir das auf die Funktion an und schauen, ob wir bereits etwas ausschließen können.

Achsensymmetrie: $\frac{1}{x} \neq \frac{1}{-x}$ → Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch.

Punktsymmetrie: $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ → Die Funktion ist nicht punktsymmetrisch, da die Gleichung aufgeht.

Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung ist die richtige Antwort.

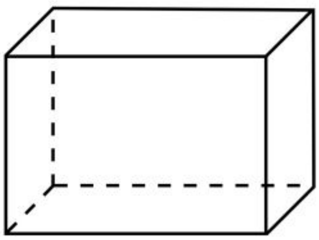
Aufgabe 8

Richtige Lösung: b) 510 cm²

Erklärung:

Bei einem Quader handelt es sich um eine geometrische Form mit 6 Rechtecken und 12 Kanten. Es sind immer 4 Kanten gleichlang. Insgesamt kann es 3 verschiedene Kantenlängen geben.

Hier eine visuelle Darstellung eines Quaders:



Wir nennen die Kanten a, b und c.

Wir haben folgende Informationen gegeben:

Kantenlänge a: $a = 12$

Kantenlänge b: $b = 9$

Kantenlänge c: $c = 7$

Wir wollen die Oberfläche berechnen. Die sich gegenüberliegenden Flächen eines Quaders sind immer gleich groß. Folglich haben wir folgende Formel:

$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

Bevor wir unsere Werte einsetzen, klammern wir aus:

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Jetzt setzen wir unsere Werte ein:

$O = 2 \cdot (12 \cdot 9 + 12 \cdot 7 + 9 \cdot 7)$

$O = 2 \cdot (108 + 84 + 63)$

$O = 2 \cdot (255)$

$O = 510$

Die richtige Lösung ist 510 cm².

Aufgabe 9

Richtige Lösung: b) $y = 5 - 0{,}5x$

Erklärung:

Um eine Gerade von Vektorenschreibweise in eine Funktionsgleichung zu übersetzen, bilden wir je Dimension eine Gleichung und lösen das Gleichungssystem, sodass wir die Variable aus der Gerade in Vektorenschreibweise eliminieren.

$\vec{v} = \binom{14}{-2} + t \cdot \binom{6}{-3}$

$\binom{x}{y} = \binom{14}{-2} + t \cdot \binom{6}{-3}$

$x = 14 + 6t$

$y = -2 - 3t$

Wir stellen eine Gleichung nach t um und setzen dann für t in der zweiten Gleichung ein. So eliminieren wir diesen Parameter und es bleibt nur x und y übrig.

$x = 14 + 6t$

$6t = -14 + x$

$t = -\frac{14}{6} + \frac{x}{6}$

$y = -2 - 3 \cdot \left(-\frac{14}{6} + \frac{x}{6}\right)$

$y = -2 + 7 - \frac{3}{6}x$

$y = 5 - 0{,}5x$

Aufgabe 10

Richtige Lösung: c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3{,}3\}$

Erklärung:

Da wir nicht durch 0 teilen dürfen, müssen wir prüfen, wann der Nenner des Bruchs $= 0$ ist und diese x-Werte aus dem Definitionsbereich ausschließen.

$x^2 - 9 \neq 0 \qquad | + 9$

$x^2 \neq 9 \qquad |\sqrt{\ }$

$x^2 \neq \pm 3$

Da wir sonst keine Beschränkungen haben, kann x alle Werte außer 3 und -3 annehmen. Das notieren wir folgendermaßen: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3{,}3\}$

Aufgabe 11

Richtige Lösung: c) $(9{,}34{,}23)$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf einer Ebene liegt, macht es Sinn diese zunächst einmal in die Koordinatenform zu übertragen, da wir dann die Punkte ganz einfach einsetzen können. Dazu bilden wir mithilfe der beiden Richtungsvektoren der Ebene den Normalenvektor und stellen damit die Koordinatenform auf. Dann setzen wir die Punkte nach und nach ein und überprüfen so, ob sie auf der Ebene liegen.

Schritt 1: Koordinatenform aufstellen:

$$E_1: \vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt bilden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - (-4) \cdot 0 \\ (-4) \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 0 \\ 4 - 6 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen:

$6x - 2y + 2z = ?$

$6 \cdot 9 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) = 54 - 12 - 10 = 32$

$6x - 2y + 2z = 32$

Schritt 2: Punkte einsetzen und prüfen:

c)

$6 \cdot 9 - 2 \cdot 34 + 2 \cdot 23 = 54 - 68 + 46 = 32$

Der Punkt $(9{,}34{,}23)$ liegt auf der Ebene E_1.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Wir berechnen zuerst den Vektor $\overrightarrow{BC}$ und schließen basierend darauf die ersten Antwortmöglichkeiten aus. Die übrigen untersuchen wir darauf, ob sie durch den Punkt A laufen.

Schritt 1: Den Vektor $\overrightarrow{BC}$ berechnen:

Um $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen, rechnen wir $C - B$:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Antwortmöglichkeit a) und d) können bereits ausgeschlossen werden, da der Richtungsvektor kein Vielfaches von $\overrightarrow{BC}$ ist.

Schritt 2: Prüfen, ob die Gerade durch den Punkt A läuft.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$2 + t \cdot -1 = 4$$

$$t = \frac{2}{-1} = -2$$

$$-10 + t \cdot -1 = -8$$

$$t = \frac{2}{-1} = -2$$

$$7 + t \cdot -1 = 9$$

$$t = \frac{2}{-1} = -2$$

Für alle drei Dimensionen gilt der selbe Wert für den Skalar t. Das bedeutet, dass die Gerade durch den Punkt A läuft.

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) $f(x) = x^2 - 4$

Erklärung:

Hier muss man alle Funktionen in den Antwortmöglichkeiten integrieren und die Integrationsgrenzen einsetzen, bis man die richtige Funktion gefunden hat.

a) $f(x) = x^2 - 4$

$$\int_0^2 (x^2 - 4)dx = -\frac{16}{3}$$

$$\left[\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4x\right]_0^2 = -\frac{16}{3}$$

$$\left[\frac{1}{3}\cdot x^3-4x\right]_0^2=-\frac{16}{3}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2^3-4\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot 0^3-4\cdot 0=-\frac{16}{3}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 8-8-0=-\frac{16}{3}$$

$$\frac{8}{3}-\frac{24}{3}=-\frac{16}{3}$$

$$-\frac{16}{3}=-\frac{16}{3}$$

Die Gleichung geht auf. Demnach ist a) die richtige Antwortmöglichkeit.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: a) $\frac{95}{1.085}$

Erklärung:

Diese Aufgabe dreht sich um bedingte Wahrscheinlichkeit, was man daran erkennen kann, dass sich die Wahrscheinlichkeit für die Akkuratesse des Tests mit dem Gesundheitszustand der Person ändert.

Wir nennen die Tuberkulose-Erkrankung T und den gesunden Zustand $\bar{T}$.

Den positiven Test nennen wir P und den negativen Test $\bar{P}$.

Gegeben ist folgendes:

$$P(P|T)=0{,}95$$

$$P(\bar{P}|\bar{T})=0{,}9$$

$$P(T)=0{,}01$$

Wir suchen: $P(T|P)$

Bayes-Regel:

$$P(T|P)=\frac{P(P|T)\cdot P(T)}{P(P)}$$

Um $P(T|P)$ zu berechnen, müssen wir nur noch $P(P)$ herausfinden.

$P(P) = P(P|T) \cdot P(T) + P(P|\bar{T}) \cdot P(\bar{T})$

$P(P|T) = 0{,}95$

$P(T) = 0{,}01$

$P(\bar{T}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$P(P|\bar{T}) = 1 - P(\bar{P}|\bar{T}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$P(P) = 0{,}95 \cdot 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}99 = 0{,}0095 + 0{,}099 = 0{,}1085$

Als nächstes setzen wir alle Werte in die Bayes-Formel ein:

$$P(T|P) = \frac{P(P|T) \cdot P(T)}{P(P)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}01}{0{,}1085} = \frac{0{,}0095}{0{,}1085} = \frac{95}{1.085}$$

Aufgabe 15

Richtige Lösung: a) 3 Tage und 17 Stunden

Erklärung:

Zunächst müssen wir die Tage in Stunden umrechnen. Da ein Tag 24 Stunden hat, multiplizieren wir dazu einfach mit 24:

Paket 1: $3 \cdot 24 + 10 = 82$
Paket 2: $2 \cdot 24 + 12 = 60$
Paket 3: $4 \cdot 24 + 8 = 104$
Paket 4: $3 \cdot 24 + 4 = 76$
Paket 5: $5 \cdot 24 + 3 = 123$

Summe: 445

Nun teilen wir die Summe durch 5 und müssen dann nur noch in Tage mit Reststunden umrechnen:

$$\frac{445}{5} = 89$$

$$\frac{89}{24} = 3 + \frac{17}{24}$$

Das entspricht einem Mittelwert bzw. einem arithmetischen Mittel von 3 Tagen und 17 Stunden.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) $\frac{8b}{a^4}$

Erklärung:

$$\frac{(2a \cdot b^3)^3 \cdot (a^{-1} \cdot 2b^6)^4}{(a \cdot b^2)^5 \cdot \left(\frac{4}{a} \cdot b^{11}\right)^2}$$

$$\frac{8 \cdot a^3 \cdot b^9 \cdot a^{-4} \cdot 16 \cdot b^{24}}{a^5 \cdot b^{10} \cdot \frac{16}{a^2} \cdot b^{22}}$$

$$\frac{16 \cdot 8 \cdot a^{-1} \cdot b^{33}}{16 \cdot a^3 \cdot b^{32}}$$

$$\frac{8b}{a^4}$$

Aufgabe 17

Richtige Lösung: a) 60 %

Erklärung:

Hier handelt es sich um disjunkte Ereignisse, was meint, dass in diesem Fall nicht in mehrere Aktien parallel investiert werden kann, sondern nur in genau eine. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, ob die Aktie im Wert steigt, oder nicht, von der Wahl der Aktie abhängig.

Die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Aktie zu wählen ist bei allen drei Aktien gleich und beträgt $\frac{1}{3}$.

Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass die Aktie nicht im Wert steigt:

$$P(steigt\ nicht \mid Aktie\ 1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 = \frac{3}{5}$$

$$P(steigt\ nicht \mid Aktie\ 2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 = \frac{2}{5}$$

$$P(steigt\ nicht \mid Aktie\ 3) = 0{,}8 = \frac{4}{5}$$

(Bei Aktie 3 wird zwar nicht explizit gesagt, dass sie auch zu 20 % Wahrscheinlichkeit im Wert steigt, jedoch ist das hier die naheliegendste Annahme.)

Insgesamt beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Aktie nicht im Wert steigt:

$$P(steigt\ nicht) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 60 %.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: c) $x = \frac{\sqrt{y^2+4}}{5}$

Erklärung:

Die Umkehrfunktion zu bilden bedeutet, dass man nach x umstellen muss. Dazu formen wir die Funktion folgendermaßen um:

$y = \sqrt{25x^2 - 4} \qquad |(\dots)^2$

$y^2 = 25x^2 - 4 \qquad | + 4$

$y^2 + 4 = 25x^2 \qquad | \div 25$

$\frac{y^2+4}{25} = x^2 \qquad |\sqrt{}$

$x = \sqrt{\frac{y^2+4}{25}} = \frac{\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{y^2+4}}{5}$

$x = \frac{\sqrt{y^2+4}}{5}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: d) 17.576

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge beachtet werden muss, wobei Wiederholung stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Variation mit Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: n^k

Hier gilt: $n = 26$ und $k = 3$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $26^3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 = 17.576$

17.576 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: c) $F(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^8 - \ e \cdot x + C$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man entweder die gegebene Funktion integrieren oder die Stammfunktionen in den Antwortmöglichkeiten ableiten, wobei es sich hier empfiehlt, zu integrieren.

$$f(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{x^{-7}} - e$$

Zunächst sollten wir die drei Komponenten separat betrachten und einzeln integrieren.

1. $\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$:

Wir schreiben den Ausdruck zunächst einmal um. Dabei nutzen wir folgendes Potenzgesetz:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = x^{-1}$$

Dementsprechend lautet der Ausdruck folgendermaßen:

$$f(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Nun integrieren wir diesen Ausdruck:

$$F(x) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right) \cdot 2} \cdot x^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2} \cdot x^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

2. $\frac{4}{x^{-7}}$:

Hier müssen wir mithilfe eines Potenzgesetzes den Bruch auflösen und können anschließend wie gewohnt normal integrieren:

Potenzgesetz: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Der Ausdruck lautet dementsprechend folgendermaßen:

$$f(x) = \frac{4}{x^{-7}} = 4x^7$$

$$F(x) = \frac{4}{(7+1)} \cdot x^{(7+1)} = \frac{4}{8} \cdot x^8 = \frac{1}{2} \cdot x^8$$

2. e :

Da e eine natürliche Zahl ist und kein x enthält, integrieren wir folgendermaßen:

$$F(x) = \frac{e}{(0+1)} \cdot x^{(0+1)} = \frac{e}{1} \cdot x^1 = e \cdot x$$

Jetzt müssen wir nur noch die einzelnen Komponenten zusammenfügen.

1. $\sqrt{x}$

2. $\frac{1}{2} \cdot x^8$

3. $e \cdot x$

$$F(x) = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^8 - e \cdot x$$

Zuletzt muss noch die Konstante C addiert werden, da es sich um ein unbestimmtes Integral handelt.

$F(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^8 - e \cdot x + C$ ist die richtige Antwort.

Lernset 11

Aufgabe 1

Richtige Lösung: a) 1,4

Erklärung:

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streubreite eines Wertes um den Durchschnitt herum. Während die Varianz die quadrierte Streuung von Werten um den Durchschnitt herum berechnet, berechnet man mit der Standardabweichung die einfache Streuung. Daher ziehen wir die Wurzel der Varianz, um die Standardabweichung zu berechnen. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$Var(x) = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

Und die Formel zur Berechnung der Standardabweichung ist demnach:

$$Std(x) = \sqrt{Var(x)}$$

Schritt 1: Mittelwert berechnen:

$$\bar{x} = \frac{11 + 8 + 10 + 12 + 9}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

Schritt 2: Varianz berechnen:

$$Var(x) = \frac{(11 - 10)^2 + (8 - 10)^2 + (10 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (9 - 10)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{(1)^2 + (-2)^2 + (0)^2 + (2)^2 + (-1)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{1 + 4 + 4 + 1}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Schritt 3: Standardabweichung berechnen:

$Std(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{2}$

Wir wissen:
$\sqrt{2} \approx 1{,}4$

Somit können wir gut approximieren:
$Std(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: d) $x = 2,\ y = 3,\ w = 0,\ z = 4$

Erklärung:

Bei einer solchen Aufgabe versuchen wir nach und nach Variablen zu eliminieren, bis wir eine Variable in einer Zahl ausdrücken und dann einsetzen können, um die anderen Variablen zu ermitteln.

I. $6 = 3x + 2w$
II. $-3w = z - 2x$
III. $2x + 3y = 5 + 2z - w$
IV. $4z = 8x$

Wir sehen, dass IV. nur x und z als Variablen enthält, I. enthält nur x und w und II. enthält x, w und z. Demnach können wir IV. nach z umstellen, in II. einsetzen und haben die neue Gleichung V. Dabei erhalten wir bereits den ersten Wert einer Variable. Anschließend muss mit den bekannten Werten nur noch eingesetzt werden.

1. Schritt: VI. nach z umstellen:

$4z = 8x$

$z = 2x$

2. Schritt: VI. in II. einsetzen:

$-3w = (2x) - 2x$

$-3w = 0$

$w = 0$

3. Schritt: Zahlenwerte für Variablen einsetzen:

$6 = 3x + 2 \cdot 0$

$6 = 3x$

$x = 2$

$-3 \cdot 0 = z - 2 \cdot (2)$

$0 = z - 4$

$z = 4$

$2 \cdot (2) + 3y = 5 + 2 \cdot (4) - 0$

$4 + 3y = 5 + 8$

$3y = 9$

$y = 3$

$x = 2,\ y = 3,\ w = 0,\ z = 4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: a) 12

Erklärung:

Wir berechnen zunächst die Distanz zwischen den jeweiligen Punkten und berechnen darauf basierend die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

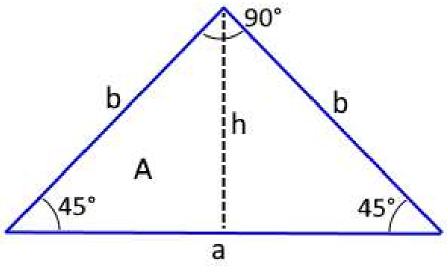
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Wir haben also zwei gleich lange Seiten mit einer Länge von 5 und eine Seite mit einer Länge von 6.

Wir müssen nun die Fläche des Dreiecks berechnen. Dazu benötigen wir die Länge der Grundseite und der Höhe.



Wir kennen die Seitenlänge b und a. Um die Höhe zu berechnen, teilen wir das Dreieck in der Hälfte und nutzen den Satz des Pythagoras. Wir wissen, dass die Seite b die Länge 5 hat und da wir das Dreieck teilen, hat die Grundseite nur noch die Länge 3. Wir sehen, dass b die längste Seite ist und mit diesen Informationen müssen wir nur noch in die Formel einsetzen:

$a^2 + h^2 = b^2$

$3^2 + h^2 = 5^2$

$9 + h^2 = 25$

$h^2 = 16$

$h = 4$

Da wir die Höhe nun kennen, müssen wir nur noch in die Formel zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks einsetzen:

$$F = \frac{1}{2} \cdot Höhe \cdot Grundfläche = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = \frac{24}{2} = 12$$

Aufgabe 4

Richtige Lösung: c) $f(1) = e$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen folgende ln-Regeln bekannt sein:

$\ln(1) = 0$

Demnach gilt:

$f(1) = \mathrm{e}^{(1)^2 - \ln(1)} = \mathrm{e}^{1-0} = e$

e ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: a) $\frac{11}{27}$

Erklärung:

Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass mindestens 2 Mal eine grüne Kugel gezogen wird, arbeiten wir mit dem Gegenereignis und berechnen, zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass maximal eine grüne Kugel gezogen wird.

Wir berechnen zuerst die Wahrscheinlichkeit für 0 gezogene grüne Kugeln:

$$\left(\frac{10}{15}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$$

Nun berechnen die Wahrscheinlichkeit für 1 gezogene grüne Kugel. Es gibt 4 mögliche Reihenfolgen, in denen man eine grüne Kugel ziehen kann, weshalb wir die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer grünen Kugel noch mit 4 multiplizieren.

$$\left(\frac{10}{15}\right)^3 \cdot \frac{5}{15} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{81}$$

$$\frac{8}{81} \cdot 4 = \frac{32}{81}$$

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit maximal eine grüne Kugel zu ziehen:

$$\frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81}$$

Dementsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit mindestens 2 grüne Kugeln zu ziehen:

$$1 - \frac{48}{81} = \frac{81}{81} - \frac{48}{81} = \frac{81 - 48}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}$$

$\frac{11}{27}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: b) $f(x) \to 0$

Erklärung:

Hier muss man für x einsetzen und approximieren.

$$f(\infty) = \sin\left(\frac{1}{\infty}\right) \approx \sin(0) = 0$$

Teilt man 1 durch ∞, ergibt es approximiert 0.

Mathematisch ausgedrückt: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\infty}\right)\right) = 0$

Somit ist die richtige Antwort $f(x) \to 0$

Aufgabe 7

Richtige Lösung: c) $(-937{,}929{,}600)$

Erklärung:

Um den Mittelpunkt der Strecke zwischen A und B zu ermitteln, müssen wir zunächst die Strecke $\overrightarrow{AB}$ berechnen und dann diesen Vektor mit $\frac{1}{2}$ multipliziert zu Punkt A dazu addieren.

Schritt 1: Strecke $\overrightarrow{AB}$ bilden:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -847 \\ 940 \\ 496 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.027 \\ 918 \\ 704 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -847 + 1.027 \\ 940 - 918 \\ 496 - 704 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 22 \\ -208 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Stützvektor Punkt A mit $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ addieren:

$$\begin{pmatrix} -1.027 \\ 918 \\ 704 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 22 \\ -208 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.027 \\ 918 \\ 704 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 \\ 11 \\ -104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.027 + 90 \\ 918 + 11 \\ 704 - 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -937 \\ 929 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Die richtige Lösung ist (937,929,600)

Aufgabe 8

Richtige Lösung: a) 0

Erklärung:

Um die Anzahl der Schnittpunkte herauszufinden, muss man zunächst die beiden Funktionen miteinander gleichsetzen und nach x auflösen. Die Anzahl der Ergebnisse verrät uns die Anzahl der Schnittpunkte.

$-(x+2)^2+2=(x-2)^2-2 \qquad |+2$

$-(x+2)^2+4=(x-2)^2 \qquad |+(x+2)$

$4=(x-2)^2+(x+2)^2 \qquad |T$

$4=x^2-4x+4+x^2+4x+4 \qquad |T$

$4=2x^2+8 \qquad |-8$

$-4=2x^2 \qquad |\div 2$

$x^2=-2$

Für diese Gleichung gibt es keine Lösung, da wir keine Wurzel aus negativen Werten ziehen können. Daher schlussfolgern wir, dass sich die beiden Funktionen nicht schneiden.

Aufgabe 9

Richtige Lösung: a) $6 \cdot \sqrt{2}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, brauchst du folgendes Wurzelgesetz:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$\sqrt{72}+\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{2}=\sqrt{36 \cdot 2}+\sqrt{16 \cdot 2}-\sqrt{25 \cdot 2}+\sqrt{2}$
$=\sqrt{36} \cdot \sqrt{2}+\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}-\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}+\sqrt{2}=6 \cdot \sqrt{2}+4 \cdot \sqrt{2}-5 \cdot \sqrt{2}+\sqrt{2}=(6+4-5+1) \cdot \sqrt{2}$
$=6 \cdot \sqrt{2}$

$6 \cdot \sqrt{2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: d) $x = 22$

Erklärung:

Solche Aufgaben können einen schnell aus dem Konzept bringen, aber keine Sorge, sie sind einfacher als es aussieht. Hier musst Du den Term Schritt für Schritt vereinfachen. Und anschließend wird nach x umgestellt.

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Rechengesetze:

$\ln(e^a) = a$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{\ln\left(e^{\ln(e^x)}\right) - \sqrt{121}}{2x - \sqrt{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(e^{\ln(e^x)}\right) = \ln\left(e^{x \cdot ln(e)}\right) = \ln(e^{x \cdot 1}) = \ln(e^x) = x \cdot ln(e) = x \cdot 1 = x$$

$$\frac{x - \sqrt{121}}{2x - \sqrt{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x - 11}{2x - x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x - 11}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x - 11 = \frac{1}{2} \cdot x$$

$$\frac{1}{2}x = 11$$

$$x = 22$$

Aufgabe 11

Richtige Lösung: b) $x + 1$

Erklärung:

Wir müssen den Ausdruck im Zähler des Bruchs faktorisieren, um den Bruch zu vereinfachen.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 3)}{x - 3} = (x + 1) = x + 1$$

$x + 1$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: b) 3

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgendes Wissen über den $\ln()$:

$\ln(\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}) = \ln(\mathrm{a}) + \ln(\mathrm{b})$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln(\mathrm{a})$

$\ln(e) = 1$

Gegeben ist:

$\log_2(x) = 3$

$\log_2(y) = 6$

Und wir suchen:

$$\log_2\left(\frac{x^2}{\sqrt{y}}\right)$$

Zunächst müssen wir ermitteln, welchen Wert x und y haben und anschließend setzen wir in den Ausdruck ein, dessen Wert wir suchen.

$\log_2(x) = 3$ ist äquivalent zu $2^3 = x$ Demnach wissen wir, dass $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$\log_2(y) = 6$ ist äquivalent zu $2^6 = x$
Demnach wissen wir, dass $x = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

Mit $x = 8$ und $y = 64$ setzen wir in den gesuchten Ausdruck ein:

$$\log_2\left(\frac{x^2}{\sqrt{y}}\right) = \log_2\left(\frac{(8)^2}{\sqrt{64}}\right) = \log_2\left(\frac{64}{8}\right) = \log_2(8)$$

$\log_2(8)$ ist äquivalent zu $2^x = 8$

Das ist recht einfach im Kopf zu lösen. Wir rechnen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ und wissen, dass der Wert des Ausdrucks 3 ist.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: d) 45

Erklärung:

Hier muss zuerst die integrierte Funktion vereinfacht werden, da die beiden Brüche das Integrieren erschweren.

Dazu benötigst du folgendes Potenzgesetz: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\int_{-1}^{2}\left(5x^4 + \frac{2}{x^{-3}} + \frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(5x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx$$

$$\int_{-1}^{2}\left(5x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1\right)dx = \left[x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left((2)^5 + \frac{1}{2}(2)^4 + \frac{1}{6}\cdot(2)^3 + (2)\right) - \left((-1)^5 + \frac{1}{2}(-1)^4 + \frac{1}{6}\cdot(-1)^3 + (-1)\right)$$

$$= \left(32 + \frac{16}{2} + \frac{8}{6} + 2\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{6} - 1\right)$$

$$= \left(32 + 8 + \frac{4}{3} + 2\right) - \left(-2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(42 + \frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{13}{6} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{130}{3}\right) - \left(-\frac{10}{6}\right)$$

$$= \frac{130}{3} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{135}{3}$$

$$= 45$$

Aufgabe 14

Richtige Lösung: a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Wir berechnen zuerst den Vektor $\overrightarrow{BC}$ und schließen basierend darauf die ersten Antwortmöglichkeiten aus. Die übrigen untersuchen wir darauf, ob sie durch den Punkt A laufen.

Schritt 1: Den Vektor $\overrightarrow{BC}$ berechnen:

Um $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen, rechnen wir $C - B$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Antwortmöglichkeit b) und d) können bereits ausgeschlossen werden, da der Richtungsvektor kein Vielfaches von $\overrightarrow{BC}$ ist.

Schritt 2: Prüfen, ob die Gerade durch den Punkt A läuft.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$7 + t \cdot 10 = 17$$

$$t = \frac{10}{10} = 1$$

$$-7 + t \cdot 6 = -1$$

$$t = \frac{6}{6} = 1$$

$$-7 + t \cdot 10 = 3$$

$$t = \frac{10}{10} = 1$$

Für alle drei Dimensionen gilt der selbe Wert für den Skalar t. Das bedeutet, dass die Gerade durch den Punkt A läuft.

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 15

Richtige Lösung: b) $\frac{1}{\sqrt[4]{16}} \cdot \sqrt[3]{8} = 2$

Erklärung:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{16}} \cdot \sqrt[3]{8} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{16}}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1 \neq 2$$

Aufgabe 16

Richtige Lösung: c) $\frac{1}{9}$

Erklärung:

Es sind genau 10 Zahlen bis 30 durch 3 teilbar (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30). Durch 9 sind genau 3 Zahlen bis 30 teilbar (9, 18, 27).

Alle Zahlen, die durch 9 teilbar sind, sind auch durch 3 teilbar, deshalb ist die Gesamtanzahl an Zahlen bis 30, die durch 3 oder 9 teilbar sind, $10 + 3 - 3 = 10$.

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 30 Kugeln durch 3 oder 9 teilbar ist, beträgt $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Zieht man 2 Kugeln, ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide durch 3 oder 9 teilbar sind, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

$\frac{1}{9}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: b) $k = 0$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir folgende Ableitungsregel kennen:

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zunächst die Bedingung aufstellen, indem wir die Ableitung berechnen und dann nach der Variable k umstellen. Wir suchen den Punkt, in dem die Tangente die Steigung 0 hat, was impliziert, dass die Funktion selbst an dieser Stelle die Steigung 0 hat. Somit stellen wir die Bedingung auf, indem wir in die erste Ableitung $x = 0$ einsetzen und diese $= 0$ setzen.

$$f(x) = \ln(x^2 + kx + 1)$$

$$f'(x) = \frac{2x + k}{x^2 + kx + 1}$$

$$f'(0) = 0 = \frac{2 \cdot 0 + k}{0^2 + k \cdot 0 + 1} = \frac{k}{1} = k$$

$$k = 0$$

$k = 0$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: c) Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 2$.

Erklärung:

Hier ist c) die richtige Antwort. Zum Berechnen muss einfach für $x = 2$ eingesetzt werden.

$$f(2) = (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 2 \cdot (2) = 8 - 3 \cdot 4 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Aufgabe 19

Richtige Lösung: d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Schritt 1: E_2 in E_1 einsetzen:

$E_1: 6x + y - 10z = 29$ $\qquad$ $E_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$6 \cdot (s + 2t) + 1 \cdot (2) - 10 \cdot (-2 + 2s - 3t) = 29$

$6s + 12t + 2 + 20 - 20s + 30t = 29$

$-14s + 42t + 22 = 29$

$-14s + 42t = 7$

$14s - 42t = -7$

$14s = 42t - 7$

$s = 3t - \frac{1}{2}$

Schritt 2: Für s in E_2 einsetzen:

Wir wissen, dass $s = 3t - \frac{1}{2}$ gilt. Da wir nun die Gerade berechnen wollen, setzen wir in E_2 für s ein und erhalten dann eine Gerade, da wir nur einen Parameter darin enthalten haben. Diese vereinfachen wir noch und erhalten dann die Schnittgerade in Parameterform.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + (3t - 0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 3t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -3t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 - 0{,}5 \\ 2 + 0 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t + 2t \\ 0 + 0 \\ 6t - 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) $f(y) = \frac{y^{12}}{32}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen benötigst du folgendes Wurzelgesetz:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Wir setzen für x ein und vereinfachen so weit wie möglich:

$$f(y) = \left(\frac{y^3}{2}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{y^3}{2}\right)^2} = \frac{y^{3 \cdot 3}}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{y^{3 \cdot 2}}{4}} = \frac{y^9}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{y^6}{4}}$$

$$= \frac{y^9}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{16} \cdot y^6} = \frac{y^9}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{y^6} = \frac{y^9}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot y^{\frac{6}{2}} = \frac{y^9}{8 \cdot 4} \cdot y^3 = \frac{y^{9+3}}{32} = \frac{y^{12}}{32}$$

$f(y) = \frac{y^{11}}{32}$ ist die richtige Antwort.

Lernset 12

Aufgabe 1

Richtige Lösung: b) $\vec{r} = 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -35 \\ 24 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man die möglichen Antworten ausrechnen und mit dem gegebenen Vektor vergleichen.

$$0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -35 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \cdot 4 \\ 0{,}3 \cdot 7 \\ 0{,}3 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \cdot -6 \\ \frac{1}{10} \cdot -35 \\ \frac{1}{10} \cdot 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ -3{,}5 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -35 \\ 24 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: c) $\frac{9}{25}$

Erklärung:

Es sind genau 6 Zahlen bis 25 durch 4 teilbar (4, 8, 12, 16, 20, 24).

Durch 6 sind genau 4 Zahlen bis 25 teilbar (6, 12, 18, 24).

Und durch 9 sind nur 2 Zahlen bis 25 teilbar (9, 18).

Es gibt 2 Zahlen (12, 24), die durch 4 und 6 teilbar sind und eine Zahl (18), die durch 6 und 9 teilbar ist. Deshalb ist die Gesamtanzahl an Zahlen bis 25, die durch 4, 6 oder 9 teilbar sind, $6 + 4 + 2 - 2 - 1 = 9$. Die Wahrscheinlichkeit eine solche Karte zu ziehen beträgt also $\frac{9}{25}$.

$\frac{9}{25}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: a) $t(x) = 9x - 6$

Erklärung:

Um die Tangente herauszufinden, muss zunächst die Steigung ermittelt werden. Diese ergibt sich aus der Ableitung von $f(x)$. Die Ableitung ist $f'(x) = 9x^2$

Als nächstes muss ermittelt werden, welche Steigung $f(x)$ konkret im Punkt $(1, f(1))$ hat. Dazu setzen wir den x-Wert in die Ableitung ein. $f'(1) = 9 \cdot (1)^2 = 9$. Somit beträgt die Steigung 9.

Jetzt müssen wir noch den y-Wert des Tangentialpunktes berechnen, um ihn anschließend in die Tangentengleichung einzusetzen:

$f(1) = 3 \cdot 1^3 = 3$ → $(1{,}3)$

Nun setzen wir die Steigung und den Punkt in die übliche Tangentengleichung ($t(x) = mx + b$) ein.

$3 = 9 \cdot 1 + b$ → $3 = 9 + b$ → $-6 = b$

Somit ist die fertige Tangentengleichung $t(x) = 9x - 6$.

$t(x) = 9x - 6$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: d) $f(x) = |x + 1| - 1$

Erklärung:

Im Graphen sehen wir eine Betragsfunktion welche den Knickpunkt im Punkt (-1|-1) hat. Wir können auch die Punkte (0|0) und (-2|0) ablesen, durch die die Funktion verläuft.

Der sicherste und einfachste Weg diese Aufgabe zu lösen ist das Einsetzen der Werte.

Setzen wir die x-Werte der drei ablesbaren Punkte ein, können wir alle Antworten außer d) ausschließen.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: c) -64

Erklärung:

$$\left(\sqrt[3]{x^{20}} \cdot y^4\right) \cdot (x^{-3} \cdot y^{-2})^2 = 16$$

$$x^{\frac{20}{3}} \cdot y^4 \cdot x^{-6} \cdot y^{-4} = 16$$

$$x^{\left(\frac{20}{3}-6\right)} \cdot y^{(4-4)} = 16$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 16$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 16$$

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt{16} = \pm 4$$

$$x = (\pm 4)^3 = \pm 64$$

-64 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: b) $\frac{1}{18}$

Erklärung:

Um die Wahrscheinlichkeit des Gesamtereignisses zu berechnen, müssen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse berechnen. Grüne Kugeln gibt es nur in zwei Urnen, dementsprechend muss in diesen beiden eine grüne Kugel gezogen werden und in der anderen Urne eine rote.

Grüne Kugel aus Urne A: $\frac{3}{6}$

Rote Kugel aus Urne B: $\frac{2}{6}$

Grüne Kugel aus Urne C: $\frac{2}{6}$

Wahrscheinlichkeit für das Gesamtereignis: $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$\frac{1}{18}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: b) $x \geq -\frac{1}{2}$

Erklärung:

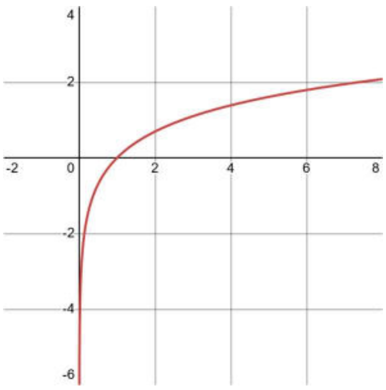
Diese Aufgabe lässt sich am schnellsten durch Einsetzen lösen. Beim Einsetzen wird schnell klar, dass bei positiven Zahlen keine Begrenzung besteht. Nur bei negativen Zahlen gibt es ab einem bestimmten x-Wert einen Widerspruch in der Ungleichung. Die einzigen negativen Untergrenzen für x, die in den Antwortmöglichkeiten stehen sind $x \geq -\frac{1}{2}$ und $-3 < x < 3$. Beim Einsetzen wird klar, dass $x \geq -\frac{1}{2}$ genau den Grenzwert von x markiert.

$x \geq -\frac{1}{2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: a) Keine Symmetrie

Erklärung:



Der ln ist eine sehr einzigartige Funktion und daher ist es von Vorteil ungefähr zu wissen, wie sie verläuft. Falls man den Verlauf der Funktion nicht vor Augen hat, kann man immer noch rechnerisch prüfen, ob die Funktion achsen- oder punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Da wir hier keine Konstante haben, ist die Punktsymmetrie zu einem anderen Punkt, als dem Koordinatenursprung auszuschließen.

Rechnerisch prüfen:

Bedingung für Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

Bedingung für Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
(Gilt nur für Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Nun wenden wir das auf die Funktion an und schauen, ob wir bereits etwas ausschließen können.

Achsensymmetrie: $\ln(x) \neq \ln(-x)$ → Der ln kann keine negativen x-Werte annehmen, weshalb diese Bedingung nicht erfüllt werden kann. Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch.

Punktsymmetrie: $\ln(-x) \neq -\ln(x)$ → Der ln kann keine negativen x-Werte annehmen, weshalb diese Bedingung nicht erfüllt werden kann. Die Funktion ist nicht punktsymmetrisch.

Keine Symmetrie ist die richtige Antwort.

Aufgabe 9

Richtige Lösung: c) $12q - 11r$

Erklärung:

Wir lösen zunächst alle Klammern auf, sodass jede Komponente mit dem entsprechenden Vorzeichen alleine für sich steht und verrechnen sie dann im Anschluss miteinander.

$4(2p + 3q - 4r) - [p - 2q - (3r - p) + 2q] + 2(-3p + r)$

$= 8p + 12q - 16r - p + 2q + (3r - p) - 2q + (-6p + 2r)$

$= 8p + 12q - 16r - p + 2q + 3r - p - 2q - 6p + 2r$

$= 8p - p - p - 6p + 12q + 2q - 2q - 16r + 3r + 2r$

$= 0 + 12q - 11r$

$= 12q - 11r$

$12q - 11r$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: b) $-19x - 10y + 40z = 4.206$

Erklärung:

Hier müssen wir zunächst die Ebene in Parameterform aufstellen und dann den Normalenvektor berechnen, um mithilfe dessen die Koordinatenform der Ebene zu bestimmen.

Wir nehmen an, dass A unser Stützvektor ist. Demnach sind die Richtungs- bzw. Spannvektoren der Ebene $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Dann berechnen wir das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren um mithilfe dessen die Koordinatenform aufzustellen.

Schritt 1: Parameterform aufstellen:

Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -4 \\ 19 \\ 108 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 \\ 22 \\ 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} -14 \\ 26 \\ 105 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 \\ 22 \\ 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parameterform:

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} -14 \\ 22 \\ 104 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Koordinatenform aufstellen:

Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 - 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot 0 - 10 \cdot 1 \\ 10 \cdot 4 - (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 16 \\ 0 - 10 \\ 40 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen und Stützvektor einsetzen:

$$-19x - 10y + 40z = ?$$

$$-19 \cdot (-14) - 10 \cdot 22 + 40 \cdot 104 = 266 - 220 + 4.160 = 4.206$$

$$-19x - 10y + 40z = 4.206$$

Aufgabe 11

Richtige Lösung: c) $D(5/4)$

Erklärung:

Damit es ein symmetrisches Trapez ergibt, muss Punkt D auf der selben „Höhe“, also y-Koordinate sein, wie $C(7/4)$. So ist sichergestellt, dass es zwei parallele Geraden gibt. Nun muss noch die x-Koordinate bestimmt werden. Dazu schauen wir uns den Abstand zwischen B und C hinsichtlich der x-Koordinate an.

$x_B - x_C = 8 - 7 = 1$

Nun muss D den selben Abstand von 1 zu A haben.

$x_D = x_A + 1 = 4 + 1 = 5$

Der Punkt D ist also $(5/4)$.

$D(5/4)$ ist die richtige Antwort

Aufgabe 12

Richtige Lösung: a) $5;\ 1$

Erklärung:

Da nie durch 0 geteilt werden darf, müssen wir herausfinden, für bei welchen x-Werten der Nenner des Bruchs 0 ist. Dazu setzen wir diesen gleich 0 und lösen nach x auf. Dazu muss hier die pq-Formel (alternativ die Mitternachtsformel) angewendet werden.

$2x^2 - 12x + 10 = 0$ → $x^2 - 6x + 5$ → $p = -6$ $q = 5$

$x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}$ → $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 5}$ → $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5}$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4}$ → $x_1 = 3 + 2 = 5$ $x_2 = 3 - 2 = 1$

5; 1 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: c) $\frac{5}{18}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir uns ansehen, wie viele Augenzahl-Paare es gibt, die in der Summe größer als 8 sind und wie viele Augenzahl-Paare es insgesamt geben kann.

Insgesamt kann es $6 \cdot 6 = 36$ Augenzahl-Paare geben.

Folgende Augenzahl-Paare haben eine Summe über 8:

9: (4,5), (5,4), (6,3), (3,6)

10: (4,6), (6,4), (5,5)

11: (5,6), (6,5)

12: (6,6)

Insgesamt also 10 Augenzahl-Paare.

Die Wahrscheinlichkeit für ein solches Augenzahl-Paar beträgt also $\frac{10}{36}$.

$\frac{5}{18}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: c) 72 %

Erklärung:

Gegeben: $P(Regen) = 0{,}3$

$P(Wolken) = 0{,}6$

Gesucht: $P(Regen \cup Wolken)$

($Regen \cup Wolken$ bedeutet Regen oder Wolken)

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass es entweder regnet oder bewölkt ist, weil sich diese Ereignisse auch überlappen könnten. Die Wahrscheinlichkeit für solche Ereignisse berechnet man folgendermaßen:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Wir haben $P(Regen)$ und $P(Wolken)$ gegeben, benötigen aber noch $P(Regen \cap Wolken)$, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

($Regen \cap Wolken$ bedeutet Regen und Wolken)

Bei unabhängigen Ereignissen, wie diesen bei regnerischem und bewölktem Wetter gilt:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Demnach berechnen wir:

$P(Regen \cap Wolken) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(Regen \cup Wolken) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$

72 % der Tage tritt mindestens eines der beiden Wetterphänomene auf.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: a) 1.232

Erklärung:

Die Dichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit einer Variable an, wobei es sich um eine stetige Variable handelt. Daher ist die Dichtefunktion integrierbar.

Wir wollen die gesamte Anzahl an PKWs, die in einem bestimmten Zeitraum in das Parkhaus fahren anhand dieser Dichtefunktion berechnen. Dazu bilden wir das Integral, welches die sogenannte Verteilungsfunktion darstellt.

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}3x^2 + 7{,}2x & 0 \leq x \leq 24 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -0{,}1x^3 + 3{,}6x^2 & 0 \leq x \leq 24 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Jetzt müssen wir nur noch die korrekten x-Werte einsetzen. Die Dichtefunktion beschreibt die Anzahl der PKWs über die 24 Stunden hinweg und daher ist die Funktion auf $0 \leq x \leq 24$ beschränkt.

Uns interessiert die Anzahl der PKWs zwischen der 2. und der 10. Stunde des Tages, also von $x = 2$ bis $x = 10$.
Demnach setzen wir diese Werte in das Integral ein und rechnen die gesamte Nutzung aus.

$$\int_6^8 (-0{,}3x^2 + 7{,}2x)dx = [-0{,}1x^3 + 3{,}6x^2]_6^8$$

$$= (-0{,}1 \cdot 10^3 + 3{,}6 \cdot 10^2) - (-0{,}1 \cdot 2^3 + 3{,}6 \cdot 2^2)$$

$$= (-0{,}1 \cdot 1000 + 3{,}6 \cdot 100) - (-0{,}1 \cdot 8 + 3{,}6 \cdot 4) = (-100 + 360) - (-0{,}8 + 14{,}4)$$

$$= (260) - (13{,}6) = 246{,}4$$

Da jede Einheit 5 PKWs entspricht müssen wir noch folgendermaßen rechnen:

$246{,}4 * 5 = 1.232$ [PKWs]

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) $= x^2 \cdot (x^2 - 6x + 9)$

Erklärung:

$$f(x) = \sqrt{x-4}$$

$$g(x) = \left((x^2+2)^2 + x^2\right)^2 (x^2+2)^2 + x^2)^2$$

$$g(f(x)) = \left(\left(\left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 2\right)^2 + \left(\sqrt{x-4}\right)^2\right)^2 = (x - 4 + 2)^2 + x - 4)^2$$

$$g(f(x)) = ((x-2)^2 + x - 4)^2 = (x^2 - 4x + 4 + x - 4)^2 = (x^2 - 3x)^2$$

$$g(f(x)) = (x^2 - 3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 6x + 9)$$

$= x^2 \cdot (x^2 - 6x + 9)$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: d) ca. 46,9

Erklärung:

Die Varianz ist ein Maß für die Streuung von Werten. Je höher, desto größer die Streuung. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

Demnach berechnen wir immer zuerst den Durchschnittswert ($\bar{x}$) und anschließend die Varianz.

Produktnummer	1	2	3	4	5	6
Produktionsdauer	17	18	22	23	31	36

$$\bar{x} = \frac{17 + 18 + 22 + 23 + 31 + 36}{6} = \frac{147}{6} = 24{,}5$$

$$Var(x) = \frac{(17 - 24{,}5)^2 + (18 - 24{,}5)^2 + (22 - 24{,}5)^2 + (23 - 24{,}5)^2 + (31 - 24{,}5)^2 + (36 - 24{,}5)^2}{6}$$

$$Var(x) = \frac{(-7{,}5)^2 + (-6{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (6{,}5)^2 + (11{,}5)^2}{6}$$

Die exakten Quadratzahlen auszurechnen wäre hier sehr schwierig und ohne Taschenrechner kaum möglich. Man kann es sich aber leichter machen, denn wenn die quadrierte Zahl auf ",5" endet, wie es hier immer der Fall ist, dann kann man das Ergebnis sehr gut approximieren, indem man die Zahl darüber und darunter miteinander multipliziert.

Bsp.: $(-7{,}5)^2 = 56{,}25 \approx 7 \cdot 8 = 56$

So rechnen wir die Varianz weiter aus.

$$Var(x) \approx \frac{7 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 7 + 11 \cdot 12}{6} = \frac{56 + 42 + 6 + 2 + 42 + 132}{6}$$

$$Var(x) \approx \frac{280}{6} = \frac{240}{6} + \frac{36}{6} + \frac{4}{6} = 40 + 6 + \frac{2}{3}$$

$$Var(x) \approx 46{,}7$$

Die Varianz der Arbeitnehmerzahl beträgt ca. 46,7. Somit ist ca. 46,9 die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: d) Keine der oberen Aussagen ist korrekt.

Erklärung:

a): Es darf keine Wurzel aus negativen Werten gezogen werden. Hier reicht schon simples ausprobieren mit z.B. $x = 2$ aus, um zu merken, dass hier nicht jeder x-Wert eingesetzt werden kann. Demnach ist a) falsch.

b): Damit der Wurzelterm $0 =$ ergibt, muss der Inhalt der Wurzel $= 0$ sein. Das prüfen wir:

$(4)^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \neq 0$

Demnach ist b) auch falsch.

c): Zum Berechnen leiten wir zuerst ab und setzen dann $x = -2$ ein.

Beim Ableiten muss hier die Kettenregel angewendet werden:

$f(x) = k\big(g(x)\big)$

$f'(x) = k'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} = (x^2 - 4x + 3)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4x + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 4)$

$f'(-2) = \frac{1}{2} \cdot ((-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot (-2) - 4) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 8 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 - 4)$

$f'(-2) = \frac{1}{2} \cdot (15)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8) = \frac{-8}{2 \cdot \sqrt{15}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} \neq 0$

Aufgabe 19

Richtige Lösung: b) 422.000

Erklärung:

Hier liegt eine Aufgabe mit einer klassischen 4-Felder-Tafel vor.
Wir bilden sie hier inkl. der Summen ab, um die Lösung etwas greifbarer zu machen:

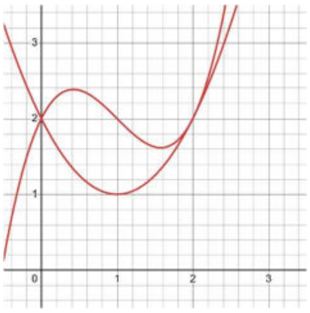
	versichert	nicht versichert	∑
Eingetragen als „versichert“	**400.000*0,98 = 392.000**	**600.000*0,05 = 30.000**	**422.000**
Eingetragen als „nicht versichert“	**400.000*0,02 = 8.000**	**600.000*0,95 = 570.000**	**578.000**
∑	**1.000.000*0,4 = 400.000**	**1.000.000*0,6 = 600.000**	**1.000.000**

Mithilfe der gegebenen Werte können wir in einer 4-Felder-Tafel das Ergebnis kalkulieren. Dazu berechnen wir zuerst die Gesamtanzahl an fehlerfreien und fehlerhaften Waren und berechnen dann die absolute Anzahl an falsch-positiven Qualitätstests.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: a) $\frac{4}{3}$

Erklärung:



Um die Fläche zu berechnen, die von diesen beiden Funktionen eingeschlossen wird, müssen wir zunächst die Schnittpunkt berechnen. Dazu setzen wir die beiden Funktionen gleich.

$x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = x^2 - 2x + 2 \qquad | - (x^2 - 2x + 2)$

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \qquad |Ausklammern$

$x \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad |pq - Formel$

$p = -4, q = 4$

$$x = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4} = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2 \pm 0 = 2$$

$x_2 = 2$

$x_1 = 0, x_2 = 2$

Die Schnittpunkte nutzen wir als Integrationsgrenze.
Da wir die Fläche zwischen den Funktionen berechnen wollen, müssen wir die untere Funktion von der oberen subtrahieren und erhalten unsere Zielfunktion, die wir integrieren. Das tun wir, da wir die Fläche unter der unteren Funktion von der Fläche der oberen Funktion abziehen. Bei dieser Aufgabe ist $g(x)$ die untere Funktion und $f(x)$ die obere Funktion. Falls man sich darin unsicher ist, kann man in beide Funktionen einen Wert zwischen den Integrationsgrenzen einsetzen und weiß somit, welche Funktion die obere ist.

Demnach rechnen wir:

$$\int_0^2 f(x) - g(x)dx = \int_0^2 \big((x^3 - 3x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2x + 2)\big)dx$$

$$= \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 2 - x^2 + 2x - 2)dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{4}{3}(2)^3 + 2(2)^2\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{4}{3}(0)^3 + 2(0)^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{4}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4\right) - (0 - 0 + 0) = \left(4 - \frac{32}{3} + 8\right) - (0) = 12 - \frac{32}{3} = \frac{36}{3} - \frac{32}{3} = \frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}$ ist die richtige Antwort

Lernset 13

Aufgabe 1

Richtige Lösung: c) 120

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge nicht beachtet wird, wobei Wiederholung stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen:

$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$ → Binomialkoeffizient

Hier gilt: $n = 8$ und $k = 3$.

Demnach ist das Ergebnis hier: $\binom{8+3-1}{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$

120 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: a) 5

Erklärung:

Die verbal formulierte Gleichung gilt es hier zunächst einmal aufzuschreiben und dann nach x umzustellen:

$x^2 + (2x)^2 = x^3$

$x^2 + 4x^2 = x^3$

$5x^2 = x^3$

$5 = \frac{x^3}{x^2}$

$5 = x$

Die richtige Antwort ist 5.

Aufgabe 3

Richtige Lösung: a) $\frac{2}{3}$

Erklärung:

Um den Abstand des Punktes zur Ebene zu berechnen, müssen wir in folgende Formel einsetzen:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wobei gilt: $P(x_0, y_0, z_0)$ und E: $Ax + By + Cz = D$

Die gegebenen Werte:

$2x + 1y + 2z = 5$

$P(2,1,-1)$

$A = 2, B = 1, C = 2, D = 5$

$x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = -1$

Jetzt setzen wir ein:

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (1) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

Wir rechnen separat den Zähler aus:

$|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (1) - 5| = |4 + 1 + 2 - 5| = |2| = 2$

Wir rechnen separat den Nenner aus:

$\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Wieder eingesetzt:

$$d = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 4

Richtige Lösung: d) $P_1(1|-5), P_2(-1|-5)$

Erklärung:

Um herauszufinden, welche die Wendepunkte der Funktion sind, müssen wir zunächst die 2. Ableitung errechnen:

$f(x) = x^4 - 6x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12$

Jetzt müssen wir die 2. Ableitung $= 0$ setzen und x ausrechnen.

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0$

$12x^2 - 12 = 0 \qquad |+12$

$12x^2 = 12 \qquad |\div 12$

$x^2 = 1 \qquad |\sqrt{}$

$x_{w1} = 1$

$x_{w2} = -1$

Jetzt müssen wir die x-Werte noch in die Funktion einsetzen, um die dazugehörigen y-Werte zu berechnen.

$f(x_{w1}) = (1)^4 - 6(1)^2 = 1 - 6 = -5$

Erster Wendepunkt: $P_1(1| - 5)$

$f(x_{w2}) = (-1)^4 - 6(-1)^2 = 1 - 6 = -5$

Zweiter Wendepunkt: $P_2(-1| - 5)$

$P_1(1|-5), P_2(-1| - 5)$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: a) 24,7

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man in möglichst kurzer Zeit möglichst präzise schätzen, was die richtige Antwort ist. Die Antwortmöglichkeiten zu quadrieren ist ohne Taschenrechner unrealistisch. Daher müssen wir mithilfe von Annäherungen arbeiten.

Hier quadrieren wir 25 als erstes, da es sich mit ganzen Zahlen am besten rechnen lässt.

$25 \cdot 25 = 625 > 610$

Wir können also schon mal ausschließen, dass das Ergebnis 25 ist.

Als nächstes quadrieren wir 24,5 approximativ. Hier können wir dadurch gut unterscheiden, in welchem Wertebereich die gesuchte Zahl ungefähr liegen muss. Zahlen, die auf ,5 enden können wir sehr gut approximativ quadrieren, indem wir die nächste ganze Zahl darüber und darunter miteinander multiplizieren.

In diesem Fall: $24 \cdot 25 = 600$. Das Ergebnis ist deutlich unter 610, was bedeutet, dass unsere gesuchte Zahl über 24,5 liegen muss. Damit kommt nur noch 24,7 als Lösung in Frage.

Die richtige Antwort ist 24,7.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: c) 2

Erklärung:

Um die Anzahl der Schnittpunkte herauszufinden, muss man zunächst die beiden Funktionen miteinander gleichsetzen und nach x auflösen. Die Anzahl der Ergebnisse verrät uns die Anzahl der Schnittpunkte.

$\frac{1}{x} = x - 2 \qquad | \cdot x$

$1 = x^2 - 2x \qquad | -1$

$0 = x^2 - 2x - 1 \qquad | pq - Formel$

$p = -2 \qquad q = -1$

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-1)} = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$x_1 = 1 + \sqrt{2} \qquad x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Es gibt demnach 2 Schnittpunkte.

2 ist die richtige Antwort.

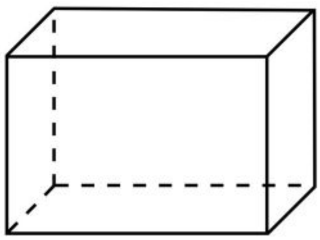
Aufgabe 7

Richtige Lösung: c) 558 cm²

Erklärung:

Bei einem Quader handelt es sich um eine geometrische Form mit 6 Rechtecken und 12 Kanten. Es sind immer 4 Kanten gleichlang. Insgesamt kann es 3 verschiedene Kantenlängen geben.

Hier eine visuelle Darstellung eines Quaders:



Wir nennen die Kanten a, b und c.

Wir haben folgende Informationen gegeben:

$Grundfläche = 81$ cm²

$Volumen = 891$ cm³

Da wir auch gegeben haben, dass die Kanten um die Grundfläche herum alle gleichlang sind, wissen wir folgendes:

Kantenlänge a: $a = \sqrt{81} = 9$

Kantenlänge b: $b = \sqrt{81} = 9$

Um Kantenlänge c herauszufinden, müssen wir uns die Berechnung des Volumens ansehen:

Die Formel lautet hier: $V = a \cdot b \cdot c$ oder in unserem Beispiel auch: $V = Grundfläche \cdot Höhe$

Wobei c die Höhe ist.

Demnach rechnen wir:

$$Volumen = Grundfläche \cdot c$$

$$c = \frac{Volumen}{Grundfläche} = \frac{891}{81} = 11$$

Nun müssen wir nur noch die Oberfläche berechnen. Die sich gegenüberliegenden Flächen eines Quaders sind immer gleich groß. Folglich haben wir folgende Formel:

$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

Da hier gilt $a = b$ können wir für a einfach b einsetzen und vereinfachen:

$$O = 2 \cdot b \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$O = 2 \cdot (b \cdot b + b \cdot c + b \cdot c)$$

$$O = 2b \cdot (b + c + c)$$

Jetzt setzen wir unsere Werte ein:

$$O = 2 \cdot 9 \cdot (9 + 11 + 11) = 18 \cdot 31 = 558$$

Die richtige Lösung ist 558 cm².

Aufgabe 8

Richtige Lösung: d) $\frac{6x^2+4x}{2x+1}$

Erklärung:

Wir klammern wir aus und anschließend kürzen wir den Bruch und erhalten unser Ergebnis:

$$\frac{12x^2 + 8x}{4x + 2} = \frac{2 \cdot (6x^2 + 4x)}{2 \cdot (2x + 1)} = \frac{6x^2 + 4x}{2x + 1}$$

$\frac{6x^2+4x}{2x+1}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 9

Richtige Lösung: a) 25 %

Erklärung:

Zuerst berechnen wir die gesamte Anzahl an möglichen Kombinationen von Gummibärchen, die Nina genommen haben könnte. Dazu nutzen wir die Kombinatorik:

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5! \cdot (15-5)!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!}$$

Wir rechnen das noch nicht aus, sondern verrechnen es davor mit dem anderen Wert, da wir in diesem Schritt vermutlich noch mehr wegkürzen können.

Als nächstes berechnen wir die Anzahl an möglichen Kombinationen von Gummibärchen, die Nina genommen haben könnte, ohne eines der weißen Gummibärchen genommen zu haben. Das bedeutet sie kann nur aus 12 Gummibärchen ihre 5 Stück ziehen, da es 3 weiße gibt.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5! \cdot (12-5)!} = \frac{12!}{5! \cdot 7!}$$

Dementsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit keinen einziges weißes Gummibärchen zu ziehen:

$$\frac{Kombinationen\ ohne\ weiße\ Gummibärchen}{Alle\ möglichen\ Kombinationen} = \frac{\frac{12!}{5! \cdot 7!}}{\frac{15!}{5! \cdot 10!}} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot \frac{5! \cdot 10!}{15!}$$

$$= \frac{5! \cdot 10!}{5! \cdot 7!} \cdot \frac{12!}{15!} = \frac{10!}{7!} \cdot \frac{12!}{15!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1} \cdot \frac{1}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{14}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{39} \cdot \frac{4}{7} = \frac{72}{273} \approx \frac{70}{280} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Aufgabe 10

Richtige Lösung: d) $Mittelwert = 16{,}1; Median\ = 15; Modus\ = 14; Spannweite\ = 33$

Erklärung:

Zu den einzelnen Statistiken:

- Der Mittelwert ist der Durchschnitt aller Werte.
- Der Median ist der Wert, der genau in der Mitte der Datenverteilung liegt (wenn die Werte nach Größe sortiert aufgelistet sind).
- Der Modus ist der Wert, der am häufigsten in einem Datensatz vorkommt.
- Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert in der Datenverteilung.

Zur Berechnung:

$$Mittelwert = \frac{37 + 14 + 9 + 17 + 16 + 23 + 4 + 14 + 21 + 6}{10} = \frac{161}{10} = 16{,}1$$

$Median$: $(4{,}6{,}9{,}14{,}14{,}16{,}17{,}21{,}23{,}37)$

→ Da wir eine gerade Anzahl an Werten haben, können wir den Median nicht direkt ablesen, sondern müssen ihn berechnen. Den Median bei einer geraden Anzahl berechnen wir, indem wir die beiden Werte um die Mitte der Verteilung addieren und dann durch 2 teilen.

$$\frac{14 + 16}{2} = 15$$

$Modus$: $(4{,}6{,}9{,}14{,}14{,}16{,}17{,}21{,}23{,}37)$ → Der häufigste Wert in dieser Datenverteilung ist 14.

$$Spannweite = 37 - 4 = 33$$

Die richtige Antwort ist $Mittelwert = 16{,}1; Median\ = 15; Modus\ = 14; Spannweite\ = 33.$

Aufgabe 11

Richtige Lösung: b) $x = \frac{30}{7}$

Erklärung:

$$\frac{5x^2}{(5 \cdot \sqrt{x})^2} + \frac{x}{2} = 3$$

Hier muss nach x umgestellt und vereinfacht werden. Wir beginnen beim Vereinfachen des Nenners des ersten Bruchs:

$$\left(5 \cdot \sqrt{x}\right)^2 = 25x$$

$$\frac{5x^2}{25x} + \frac{x}{2} = 3$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 3$$

Jetzt müssen wir die Brüche elminieren. Dazu multiplizieren wir alles mit 10.

$$\frac{10x}{5}+\frac{10x}{2}=30$$

$$2x+5x=30$$

$$7x=30$$

$$x=\frac{30}{7}$$

$x=\frac{30}{7}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 12

Richtige Lösung: a) $(-5,-1{,}4)$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf einer Ebene liegt, macht es Sinn diese zunächst einmal in die Koordinatenform zu übertragen, da wir dann die Punkte ganz einfach einsetzen können. Dazu bilden wir mithilfe der beiden Richtungsvektoren der Ebene den Normalenvektor und stellen damit die Koordinatenform auf. Dann setzen wir die Punkte nach und nach ein und überprüfen so, ob sie auf der Ebene liegen.

Schritt 1: Koordinatenform aufstellen:

$$E_1: \vec{w}=\begin{pmatrix}31\\-2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-11\\1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt bilden:

$$\begin{pmatrix}-11\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2-2\cdot 2\\2\cdot 3-(-11)\cdot 2\\(-11)\cdot 2-1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-4\\6+22\\-22-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\28\\-25\end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen:

$$-2x+28y-25z=?$$

$$-2\cdot 31+28\cdot(-2)-25\cdot 0=-62-56=-118$$

$$-2x+28y-25z=-118$$

Schritt 2: Punkte einsetzen und prüfen:

a)

$-2 \cdot (-5) + 28 \cdot (-1) - 25 \cdot 4 = 10 - 28 - 100 = -118$

Der Punkt $(-5, -1{,}4)$ liegt auf der Ebene E_1.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) Sie schneiden sich nicht.

Erklärung:

Um zu prüfen, ob sich zwei Geraden im Vektorraum schneiden, setzen wir sie gleich und bilden für jede Dimension jeweils eine Gleichung, mithilfe derer wir die Werte der Parameter im Schnittpunkt ermitteln, sofern einer vorliegt. Liegt ein Schnittpunkt vor, setzen wir die Werte der Parameter in die Gerade ein und erhalten den Schnittpunkt.

Schritt 1: Gleichsetzen, Gleichungen bilden & Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Drei Gleichungen:

IV. $6 + 9s = 1 + 16t$

V. $13 + s = 2 + 3t$

VI. $-4 - 11s = 1 + 4t$

II.: $13 + s = 2 + 3t \quad | -13$

$s = -11 + 3t$

Jetzt setzen wir für s in I. ein:

$6 + 9 \cdot (-11 + 3t) = 1 + 16t$

$6 - 99 + 27t = 1 + 16t$

$-93 + 27t = 1 + 16t$

$11t = 94$

$t = \frac{94}{11}$

$s = -11 + 3t$

$s = -11 + 3 \cdot \left(\frac{94}{11}\right)$

$s = -\frac{121}{11} + \frac{282}{11}$

$s = \frac{161}{11}$

Schritt 2: Parameter-Werte mit Gleichung prüfen:

Da die Zahlen sehr groß sind und die Rechnung umständlich, kann man auch zunächst mit der dritten Gleichung in diesem Beispiel testen, ob überhaupt ein Schnittpunkt vorliegt. Andernfalls müsste man etwas mehr rechnen, um diese Erkenntnis zu haben.

$-4 - 11 \cdot \left(\frac{161}{11}\right) = 1 + 4 \cdot \left(\frac{94}{11}\right)$

$-4 - 161 = 1 + \frac{376}{11}$

$-166 \neq \frac{376}{11}$

Hier können wir erkennen, dass die Gleichung nicht aufgehen kann und somit auch kein Schnittpunkt vorliegt.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: b) 812.000

Erklärung:

Hier liegt eine Aufgabe mit einer klassischen 4-Felder-Tafel vor.
Wir bilden sie hier inkl. der Summen ab, um die Lösung etwas greifbarer zu machen:

	Nicht wahlberechtigt	wahlberechtigt	∑
Eingetragen als „wahlberechtigt"	**800.000*0,06 = 48.000**	**1.200.000*0,95 = 1.140.000**	**1.188.000**
Eingetragen als „nicht wahlberechtigt"	**800.000*0,94 = 752.000**	**1.200.000*0,05 = 60.000**	**812.000**
∑	**2.000.000*0,4 = 800.000**	**2.000.000*0,6 = 1.200.000**	**2.000.000**

Mithilfe der gegebenen Werte können wir in einer 4-Felder-Tafel das Ergebnis kalkulieren. Dazu berechnen wir zuerst die Gesamtanzahl an fehlerfreien und fehlerhaften Waren und berechnen dann die absolute Anzahl an falsch-positiven Qualitätstests.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: d) 1

Erklärung:

Um diese Aufgabe lösen zu können, musst du wissen, dass:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \mathrm{a}$

Wir multiplizieren den gesamten Bruch mit $\sqrt{a}$ und vereinfachen somit den Term:

$$\frac{-\sqrt{a}+1+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}} = \frac{\left(-\sqrt{a}+1+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)\cdot\sqrt{a}}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\cdot\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+1\cdot\sqrt{a}+\frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}$$

$$= \frac{-a+\sqrt{a}+1-\sqrt{a}}{1-a} = \frac{-a+1}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} = \frac{1}{1} = 1$$

Aufgabe 16

Richtige Lösung: d) $k = -4$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir folgende Ableitungsregel kennen:

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zunächst die Bedingung aufstellen, indem wir die Ableitung berechnen und dann nach der Variable k umstellen. Wir suchen den Punkt, in dem die Tangente die Steigung 1 hat, was impliziert, dass die Funktion selbst an dieser Stelle die Steigung 1 hat. Somit stellen wir die Bedingung auf, indem wir in die erste Ableitung $x = 0$ einsetzen und diese $= 0$ setzen.

$$f(x) = e^{kx} + 5x$$

$$f'(x) = k \cdot e^{kx} + 5$$

$$f'(0) = 1 = k \cdot e^{k \cdot 0} + 5 = k \cdot 1 + 5 = k + 5$$

$$1 = k + 5$$

$$k = -4$$

$k = -4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: b) 3

Erklärung:

Um herauszufinden, wie viele Samen Max sähen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 27,1 % einen keimenden Samen zu erhalten, wenn die Wahrscheinlichkeit, das ein Samen erfolgreich keimt, 10 % beträgt, verwenden wir folgenden Ansatz:

Wir suchen die kleinste Anzahl von Samen n, für die gilt:

$$1-\left(1-\frac{1}{10}\right)^n \geq \frac{271}{1.000} \qquad \left|+\left(1-\frac{1}{10}\right)^n\right.$$

$$1 \geq \frac{271}{1.000}+(1-\frac{1}{10})^n \qquad \left|-\frac{999}{1.000}\right.$$

$$1-\frac{271}{1.000} \geq (1-\frac{1}{10})^n$$

$$\frac{729}{1.000} \geq \left(\frac{9}{10}\right)^n \qquad \left|\log_{\frac{9}{10}}\left(\frac{729}{1.000}\right)\right. \qquad \rightarrow \qquad \frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{729}{1.000}$$

$n \geq 3$

Da für n nur ganze Zahlen in Frage kommen, macht es Sinn verschiedene Werte auszutesten.

3 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: c) $f(x) \to 0$

Erklärung:

Hier muss man für x einsetzen und approximieren.

$$f(\infty)=\sqrt{\infty^2+1}-\infty \approx \sqrt{\infty^2}-\infty=\infty-\infty=0$$

Teilt man 1 durch ∞, ergibt es approximiert 0.

Mathematisch ausgedrückt: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$

Somit ist die richtige Antwort $f(x) \to 0$

Aufgabe 19

Richtige Lösung: c) $(3{,}3{,}4)$

Erklärung:

Diese Aufgabe lässt sich mit einem sehr kurzen Lösungsweg bereits lösen, denn in der Aufgabenstellung steht bereits etwas, was zumindest ein guter Hinweis ist.

Antwortmöglichkeit c) ist genau der Stützverktor der Ebene. Somit wissen wir, dass er auf jeden Fall in der Ebene liegt und können mithilfe des Gleichsetzens mit der Gleichung prüfen, ob auch die Gleichung durch diesen Punkt läuft.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$1+4r=3$$

$$r=\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$$

Tatsächlich liegt der Punkt auch auf der Geraden, wodurch wir bereits mit einem sehr kurzen Rechenweg unser Ergebnis gefunden haben. Es ist zwar selten der Fall, dass der Stützvektor auch der Schnittpunkt ist, aber wenn es bereits den Hinweis gibt, dann kann es sich lohnen das kurz zu prüfen.

Alternativ gibt es hier noch den langen Lösungsweg:

Wenn wir den Schnittpunkt einer Gerade und einer Ebene berechnen müssen, wobei beide in der Parameterform gegeben sind, formen wir die Ebene zuerst in die Koordinatenform um, um dann die Gerade in Parameterform in die Koordinatenform der Ebene einzusetzen. Anschließend müssen wir noch nach dem Parameter der Geraden auflösen und diesen in die Gerade einsetzen um final den Schnittpunkt zu ermitteln.

Schritt 1: Ebene in Koordinatenform bringen:
Um eine Ebene von der Parameterform in die Koordinatenform zu bringen, müssen wir zunächst anhand des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren den Normalenvektor der Ebene bilden. Haben wir diesen ermittelt, setzen wir in die Koordinatenform mit den Werten des Normalenvektors den Punkt des Stützvektors ein, um den Wert auf der rechten Seite der Gleichung zu ermitteln.

$$E_1:\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 \cdot 2 - (-2) \cdot (-5)\\(-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2\\1 \cdot (-5) - 7 \cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 - 10\\-8 - 2\\-5 - 28\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-10\\-33\end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen und Stützvektor einsetzen:

$4x - 10y - 33z = ?$

$4 \cdot 3 - 10 \cdot 3 - 33 \cdot 4 = 12 - 30 - 132 = -150$

Koordinatenform:

$4x - 10y - 33z = -150$

Schritt 2: Gerade in Koordinatenform der Ebene einsetzen und nach Parameter auflösen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$$

$4x - 10y - 33z = -150$

Eingesetzt:

$4 \cdot (1 + 4r) - 10 \cdot (2 + 2r) - 33 \cdot (3 + 2r) = -150$

$4 + 16r - 20 - 20r - 99 - 66r = -150$

$-70r - 115 = -150$

$-70r = -35$

$$r = \frac{-35}{-70} = \frac{1}{2}$$

Schritt 3: Parameter-Wert in Gerade einsetzen und Punkt ermitteln:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$$

Die richtige Antwort ist $(3,3,4)$

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Um eine Funktionsgleichung in Vektorenschreibweise zu übersetzen, müssen wir zunächst anhand der Steigung den Richtungsvektor bestimmen und anschließend anhand der Konstante in der Funktionsgleichung den Stützvektor der Geraden.

Steigung:

Die Steigung beträgt gemäß der Funktionsgleichung 3. Das bedeutet, wenn x um 1 Einheiten steigt, steigt y um 3 Einheit. In Vektorenschreibweise drücken wir das so aus:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir erkennen, dass keine Antwortmöglichkeit genau diesen Richtungsvektor enthält. Allerdings sind die Richtungsvektoren von b) und d) Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, was bedeutet, dass sie ebenfalls die Steigung der Funktionsgleichung beschreiben.

Stützvektor:

Setzen wir in die Funktionsgleichung für $x = 0$ ein, erhalten wir einen Punkt, der auf der Geraden liegt. Diesen übersetzen wir in die Vektorenschreibweise und erhalten so unsere fertige Gerade.

$y = 3 \cdot 0 - 5 = 0 - 5 = -5$

Stützvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Die Gerade: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir erkennen, dass beide Antwortmöglichkeiten mit einem äquivalenten Richtungsvektor andere Stützvektoren haben. Deshalb müssen wir prüfen, ob die jeweiligen Stützvektoren auf der gesuchten Gerade liegen.

b)

Stützvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ → wir setzen den x-Wert in die Funktionsgleichung ein und prüfen, ob der Punkt darauf liegt.

$y = 3 \cdot (2) - 5 = 6 - 5 = 1 \neq -1$

Antwortmöglichkeit b) kann ausgeschlossen werden.

d)

Stützvektor: $\begin{pmatrix} -4 \\ -17 \end{pmatrix}$ → wir setzen den x-Wert in die Funktionsgleichung ein und prüfen, ob der Punkt darauf liegt.

$y = 3 \cdot (-4) - 5 = -12 - 5 = -17$

Der Stützvektor liegt auf der Geraden.

Die richtige Lösung ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -17 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lernset 14

Aufgabe 1

Richtige Lösung: a) $\log_7(3) \cdot \log_3(7) = 1{,}75$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, wird folgendes Logarithmusgesetz benötigt:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Wenden wir dieses auf Antwortmöglichkeit a) an:

$\log_7(3) \cdot \log_3(7) = 1{,}75$

Durch das Logarithmusgesetz wissen wir: $\log_7(3) = \frac{1}{\log_3(7)}$

Das setzen wir in die Gleichung ein:

$$\frac{1}{\log_3(7)} \cdot \log_3(7) = \frac{\log_3(7)}{\log_3(7)} = \frac{1}{1} = 1 \neq 1{,}75$$

Aufgabe 2

Richtige Lösung: c) $-2x - 6y + 15z = 508$

Erklärung:

Hier müssen wir zunächst die Ebene in Parameterform aufstellen und dann den Normalenvektor berechnen, um mithilfe dessen die Koordinatenform der Ebene zu bestimmen.

Wir nehmen an, dass A unser Stützvektor ist. Demnach sind die Richtungs- bzw. Spannvektoren der Ebene $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Dann berechnen wir das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren um mithilfe dessen die Koordinatenform aufzustellen.

Schritt 1: Parameterform aufstellen:

Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 40 \\ 22 \\ 48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 \\ 37 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 55 \\ 47 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 \\ 37 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Parameterform:

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} 25 \\ 37 \\ 52 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Koordinatenform aufstellen:

Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-15) \cdot 8 - (-4) \cdot 10 \\ (-4) \cdot 30 - 15 \cdot 8 \\ 15 \cdot 10 - (-15) \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 + 40 \\ -120 - 120 \\ 150 + 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -240 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor kann skaliert werden, um die Rechnung zu vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} -80 \\ -240 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen und Stützvektor einsetzen:

$$-2x - 6y + 15z = ?$$

$$-2 \cdot 25 - 6 \cdot 37 + 15 \cdot 52 = -50 - 222 + 780 = 508$$

$$-2x - 6y + 15z = 508$$

Aufgabe 3

Richtige Lösung: c) 1.001

Erklärung:

Hier liegt eine Auswahl vor, bei der die Reihenfolge nicht beachtet wird, wobei Wiederholung nicht stattfinden kann. Somit handelt es sich um eine Kombination ohne Wiederholung. Die Berechnung einer solchen geht folgendermaßen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ → Binomialkoeffizient

Hier gilt: $n = 14$ und $k = 4$.

Demnach ist das Ergebnis hier:

$$\binom{14}{4} = \frac{14!}{4! \cdot (14-4)!} = \frac{14!}{4! \cdot 10!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 11}{2} = \frac{7 \cdot 13 \cdot 11}{1} = 77 \cdot 13 = 1.001$$

1.001 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 4

Richtige Lösung: d) $(27{,}39,-3)$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf einer Ebene liegt, macht es Sinn diese zunächst einmal in die Koordinatenform zu übertragen, da wir dann die Punkte ganz einfach einsetzen können. Dazu bilden wir mithilfe der beiden Richtungsvektoren der Ebene den Normalenvektor und stellen damit die Koordinatenform auf. Dann setzen wir die Punkte nach und nach ein und überprüfen so, ob sie auf der Ebene liegen.

Schritt 1: Koordinatenform aufstellen:

$$E_1: \vec{w} = \begin{pmatrix} 109 \\ 63 \\ 55 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt bilden:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 + 1 \\ -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen:

$-x + y + z = ?$

$-109 + 63 + 55 = 9$

$-x + y + z = 9$

Schritt 2: Punkte einsetzen und prüfen:

d)

$-27 + 39 + (-3) = -27 + 39 - 3 = 9$

Der Punkt $(27{,}39,-3)$ liegt auf der Ebene E_1.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: c) $16x^2 - 12xy + 9y^2$

Erklärung:

2. Binomische Formel

$$(4x - 3y)^2 + 12xy = 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 12xy = 16x^2 - 12xy + 9y^2$$

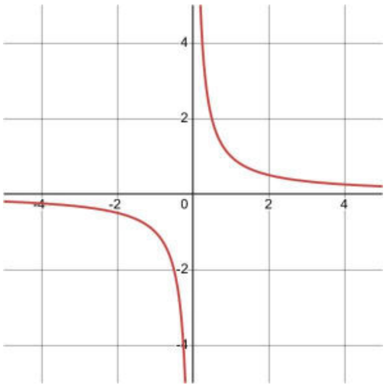
$16x^2 - 12xy + 9y^2$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 6

Richtige Lösung: d) 4 Mal

Erklärung:

Um diese Frage zu beantworten, sollte man den Verlauf der Funktion kennen. Schaut man sich den Graphen an, liegt die Antwort auf der Hand:



Der Funktionsgraph nähert sich in 2 Quadranten jeweils 2 Mal einer Koordinatenachse asymptotisch. Demnach ist die korrekte Antwort, dass sie sich insgesamt 4 Mal einer Koordinatenachse asymptotisch nähert.

Aufgabe 7

Richtige Lösung: b) $x \geq \frac{6}{5}$

Erklärung:

Der Term darf nicht < 0 werden. Im Nenner steht nur x^2, was nie 0 werden kann, weshalb wir nur den Zähler prüfen müssen, für welche x-Werte er ≥ 0 sind und stellen so fest, was für x gilt.

$5x - 6 \geq 0 \qquad |+6$

$5x \geq 6 \qquad |\div 5$

$$x \geq \frac{6}{5}$$

$x \geq \frac{6}{5}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: d) 3

Erklärung:

Um den Abstand des Punktes zur Ebene zu berechnen, müssen wir in folgende Formel einsetzen:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Wobei gilt: $P(x_0, y_0, z_0)$ und E: $Ax + By + Cz = D$

Die gegebenen Werte:

$-12x - 3y + 4z = 42$

$P(4, -9{,}6)$

$A = -12, B = -3, C = 4, D = 42$

$x_0 = 4, y_0 = -9, z_0 = 6$

Jetzt setzen wir ein:

$$d = \frac{|-12 \cdot 4 - 3 \cdot (-9) + 4 \cdot 6 - 42|}{\sqrt{(-12)^2 + (-3)^2 + 4^2}}$$

Wir rechnen separat den Zähler aus:

$$|-12 \cdot 4 - 3 \cdot (-9) + 4 \cdot 6 - 42| = |-48 + 27 + 24 - 42| = |-39| = 39$$

Wir rechnen separat den Nenner aus:

$$\sqrt{(-12)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13$$

Wieder eingesetzt:

$$d = \frac{39}{13} = 3$$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: b) $\frac{96}{221}$

Erklärung:

Es gibt im ganzen Set insgesamt $4 \cdot 4 = 16$ Karten mit einer ungeraden Zahl darauf und demnach 36 Karten, die keine ungerade Zahl haben. Die Wahrscheinlichkeit einmal eine Karten mit einer ungeraden Zahl zu ziehen, wenn nicht zurückgelegt wird, beträgt:

$$\frac{16}{52} \cdot \frac{36}{51} = \frac{4}{13} \cdot \frac{12}{17} = \frac{48}{221}$$

Da es 2 mögliche Reihenfolgen für das Ziehen der Karte mit einer ungeraden Zahl gibt [(ungerade, nicht ungerade) oder (nicht ungerade, ungerade)], müssen wir diese Wahrscheinlichkeit noch mit 2 multiplizieren.

$$\frac{48}{221} \cdot 2 = \frac{96}{221}$$

$\frac{96}{221}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: d) $\frac{2x+3}{x+2}$

Erklärung:

Wir müssen den Ausdruck unter der Wurzel im Zähler und Nenner des Bruchs faktorisieren, um die Wurzel aufzulösen und den Bruch zu vereinfachen.

Faktorisieren:

$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$$\frac{\sqrt{4x^2 + 12x + 9}}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} = \frac{\sqrt{(2x + 3)^2}}{\sqrt{(x + 2)^2}} = \frac{2x + 3}{x + 2}$$

$\frac{2x+3}{x+2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 85 \\ 31 \\ -28 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ -24 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Wir berechnen zuerst den Vektor $\overrightarrow{BC}$ und schließen basierend darauf die ersten Antwortmöglichkeiten aus. Die übrigen untersuchen wir darauf, ob sie durch den Punkt A laufen.

Schritt 1: Den Vektor $\overrightarrow{BC}$ berechnen:

Um $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen, rechnen wir $C - B$:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -82 \\ 71 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -71 \\ 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Alle Antwortmöglichkeiten außer a) können hier bereits ausgeschlossen werden, da der Richtungsvektor ausschließlich bei a) ein Vielfaches von $\overrightarrow{BC}$ ist.

Die richtige Antwort ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 85 \\ 31 \\ -28 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ -24 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12

Richtige Lösung: a) $D(0/1)$

Erklärung:

Damit es eine symmetrische Raute ergibt, muss Punkt D auf der selben x-Koordinate sein, wie . Also auf $x = 0$. Nun muss noch die y-Koordinate bestimmt werden. Dazu schauen wir uns den Abstand zwischen der Höhe von und bzw. hinsichtlich der y-Koordinate an.

$y_C - y_B = 5 - 3 = 2$

Nun muss D den selben Abstand von 2 zu A bzw. B haben, bloß in die andere Richtung, also -2.

$y_D = y_A - 2 = 3 - 2 = 1$

Der Punkt D ist also $(0/1)$.

$D(0/1)$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: d) 2.049

Erklärung:

Damit zwei Ereignisse unabhängig voneinander sind, muss folgendes gelten:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt biologisch angebaut wurde.

$P(F)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt Fair-Trade zertifiziert ist.

Gegeben:

$P(B) = \frac{219}{6.147}$

$$P(B \cap F) = \frac{73}{6.147}$$

Gesucht:

Anzahl der Mitarbeiter in einer Führungsposition.

$$P(F) = \frac{P(B \cap F)}{P(B)} = \frac{\frac{73}{6.147}}{\frac{219}{6.147}} = \frac{73}{6.147} \cdot \frac{6.147}{219} = \frac{73}{219} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 6.147 = 2.049$$

2.049 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: b) $4x - 12y + 24z = 406$

Erklärung:

Um zu prüfen, ob zwei Ebenen parallel zueinander liegen, ist der schnellste weg, zu prüfen, ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen kollinear sind. Der Normalenvektor zeigt senkrecht auf die Ebene und wenn zwei Ebenen parallel zueinander liegen, dann sind die Normalenvektoren kollinear bzw. ein Vielfaches voneinander.

Da wir in den Antwortmöglichkeiten nur Ebenengleichungen in Koordinatenform gegeben haben, aus denen man den Normalenvektor direkt ablesen kann, müssen wir nur noch den Normalenvektor der Ebene E_1 berechnen und vergleichen.

Normalenvektor von E_1:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 - 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ -3 - 0 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss nur noch geprüft werden, zu welchem Normalenvektor dieser kollinear ist.

d) $4x - 12y + 24z = 406$

Hier können wir den Normalenvektor ablesen: $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$

Kollinearität prüfen: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$

$x = 4 \qquad x = 4$

$-3x = -12 \qquad x = 4$

$6x = 24 \qquad x = 4$

Der Normalenvektor ist ein Vielfaches des Normalenvektors von E_1 und somit liegen die Ebenen parallel zueinander.

Aufgabe 15

Richtige Lösung: a) ca. 6 %

Erklärung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mischung gelingt liegt bei $0{,}9 = \frac{9}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mischung nicht gelingt liegt bei $0{,}1 = \frac{1}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Szenario beträgt demnach:

$0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3$

$$0{,}9^5 = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{81 \cdot 81 \cdot 9}{100.000} \approx \frac{80 \cdot 80 \cdot 9}{100.000} = \frac{6.400 \cdot 9}{100.000} = \frac{57.600}{100.000}$$

$$0{,}9^5 \cdot 0{,}1 = \frac{57.600}{100.000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{57.600}{1.000.000} = 0{,}0576 \approx 6\ \%$$

Die richtige Antwort ist ca. 6 %.

Aufgabe 16

Richtige Lösung: b) $f(y) = \frac{5 \cdot y^{\frac{3}{4}} - 4 \cdot \sqrt{y}}{y^{\frac{1}{6}} + 2}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe ohne Probleme zu lösen sollte man den Wurzelterm immer in Form von Exponenten schreiben, also $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$

Hier ist saubere Notation besonders wichtig, da man sich bei solch einem Bruch im Kopf schnell verrechnen kann und die Antwortmöglichkeiten alle recht ähnlich sind.

Wir setzen für x ein und vereinfachen so weit wie möglich:

$$f(y) = \frac{5\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} - 4\left(y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + 2} = \frac{5 \cdot y^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2}} - 4 \cdot y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}} + 2} = \frac{5 \cdot y^{\frac{3}{4}} - 4 \cdot y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{6}} + 2}$$

$$\frac{5 \cdot y^{\frac{3}{4}} - 4 \cdot y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{6}} + 2} = \frac{5 \cdot y^{\frac{3}{4}} - 4 \cdot \sqrt{y}}{y^{\frac{1}{6}} + 2}$$

$f(y) = \frac{5 \cdot y^{\frac{3}{4}} - 4 \cdot \sqrt{y}}{y^{\frac{1}{6}} + 2}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 17

Richtige Lösung: d) Buchhaltung, IT, Lagerhaltung, Verkauf

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen müssen wir zunächst die gesamte Mitarbeiteranzahl pro Abteilung berechnen. Dann setzen wir die Anzahl der Eltern mit der Gesamtanzahl der Mitarbeiter ins Verhältnis und runden ggf., sodass wir die Werte miteinander vergleichen können.

Abteilung	**Buchhaltung**	**Lagerhaltung**	**Verkauf**	**IT**
Hat Kinder	17	12	31	9
Hat keine Kinder	3	3	13	2
Gesamtanzahl der Mitarbeiter	20	15	44	11
Anteil der Eltern	$\frac{17}{20}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{31}{44}$	$\frac{9}{11}$
Elternanteil gerundet	$\frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{85}{100}$ $= 0{,}85$	$\frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$ $\frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100}$ $= 0{,}8$	$\frac{31 \div 11}{44 \div 11} = \frac{2{,}8}{4}$ $\frac{2{,}8 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{70}{100}$ $\approx 0{,}7$	$\frac{9 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{81}{99}$ $\approx 0{,}81$
Rang	1	3	4	2

Buchhaltung, IT, Lagerhaltung, Verkauf ist die richtige Reihenfolge des Rankings.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: a) 94,8 %

Erklärung:

Da die Wahrscheinlichkeit mindestens 3 der 4 Tests zu bestehen die Möglichkeit einschließt, 3 Tests zu bestehen und auch alle 4 zu bestehen, müssen wir beide Szenarien berechnen und anschließend addieren.

Die Wahrscheinlichkeit, dass er alle 4 Tests besteht wird folgendermaßen berechnet:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{81 \cdot 81}{10.000} = \frac{6.561}{10.000}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass er 3 von 4 Tests besteht wird folgendermaßen berechnet:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \binom{4}{1} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \cdot \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{81 \cdot 9}{10.000} \cdot 4 \approx \frac{729 \cdot 4}{10.000} = \frac{2.916}{10.000}$$

Wir rechnen hier $\binom{4}{1}$ da er nur einen der 4 nicht besteht und es somit mehrere mögliche Reihenfolgen gibt.

Nun addieren wir die beiden Wahrscheinlichkeiten und erhalten die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit:

$$\frac{6.561}{10.000} + \frac{2.916}{10.000} = \frac{9.477}{10.000} = 0{,}9477 \approx 94{,}8\ \%$$

94,8 % ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: c) $f(x) = 3x^2 - 6x$

Erklärung:

Hier muss man alle Funktionen in den Antwortmöglichkeiten integrieren und die Integrationsgrenzen einsetzen, bis man die richtige Funktion gefunden hat.

c) $f(x) = 3x^2 - 6x$

$$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 6x)dx = 20$$

$$\left[\frac{3x^{2+1}}{2+1} - \frac{6x^{1+1}}{1+1}\right]_{-2}^{3} = 20$$

$$\left[\frac{1}{3} \cdot 3x^3 - \frac{1}{2} \cdot 6x^2\right]_{-2}^{3} = 20$$

$$[x^3 - 3x^2]_{-2}^{3} = 20$$

$$(3^3 - 3 \cdot 3^2) - ((-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2) = 20$$

$$(27 - 27) - (-8 - 3 \cdot 4) = 20$$

$$0 - (-8 - 12) = 20$$

$$20 = 20$$

Die Gleichung geht auf. Demnach ist c) die richtige Antwortmöglichkeit.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) $f(2) = \sqrt{8}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, setzen wir ein und vereinfachen.

$$f(2) = \frac{2^4 - 8}{\sqrt{2^2 + 4}} = \frac{16 - 8}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{8}} = \sqrt{8}$$

$f(2) = \sqrt{8}$ ist die richtige Antwort.

Lernset 15

Aufgabe 1

Richtige Lösung: d) $x = 7,\ y = -7,\ w = 0,\ z = 7$

Erklärung:

Bei einer solchen Aufgabe versuchen wir nach und nach Variablen zu eliminieren, bis wir eine Variable in einer Zahl ausdrücken und dann einsetzen können, um die anderen Variablen zu ermitteln.

I. $2x = 9w - 2y$
II. $0 = x + y$
III. $x + y + z - 6 = 1$
IV. $2z - 7w = 7x + 5y$

Bei dieser Aufgabe haben wir sehr gute Ansatzpunkte in den Gleichungen. Wir können II. in III. einsetzen und direkt den Wert von z berechnen. Durch II. wissen wir auch direkt, dass $x = -y$, was wir I. einsetzen können. Auch können wir es zusammen mit dem Wert von z in IV. einsetzen. So können wir mit wenigen Rechenschritten den Wert aller Variablen berechnen.

1. Schritt: II. in III. einsetzen:

III.: $x + y + z - 6 = 1$

$(0) + z - 6 = 1$

$z = 7$

2. Schritt: II. umstellen und in I. einsetzen:

II.: $0 = x + y$

$x = -y$

II. in I.: $2x = 9w - 2y$

$2x = 9w - 2 \cdot (-x)$

$2x = 9w + 2x$

$0 = 9w$

$w = 0$

II. in VI.: $2z = -\frac{3}{2}\,x - 9 + (-3x - z)$

$$2z = -\frac{3}{2}\,x - \frac{6}{2}x - 9 - z$$

$$3z = -\frac{9}{2}\,x - 9$$

VIII.: $z = -\frac{3}{2}\,x - 3$

3. Schritt: II. und die Werte von z und w in IV. einsetzen:

V.: $2z - 7w = 7x + 5y$

$$2 \cdot (7) - 7 \cdot (0) = 7x + 5 \cdot (-x)$$

$$14 - 0 = 7x - 5x$$

$$14 = 2x$$

$$x = 7$$

4. Schritt: x-Wert einsetzen, um y-Wert zu ermitteln:

$$y = -x$$

$$y = -(7) = -7$$

$x = 7,\ y = -7,\ w = 0,\ z = 7$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 2

Richtige Lösung: b) $a = 4$

Erklärung:

Um Orthogonalität herzustellen, setzen wir das Skalarprodukt der beiden Vektoren $= 0$ und lösen nach a auf.

$$\begin{pmatrix} 166 \\ -41 \\ \sqrt{625} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$166 \cdot 4 - 41a + \sqrt{625} \cdot -20 = 0$$

$$664 - 41a + 25 \cdot -20 = 0$$

$664 - 41a - 500 = 0$

$164 - 41a = 0$

$164 = 41a$

$a = \frac{164}{41} = 4$

Aufgabe 3

Richtige Lösung: b) $x = \frac{1}{2}$

Erklärung:

Solche Aufgaben können einen schnell aus dem Konzept bringen, aber keine Sorge, sie sind einfacher als es aussieht. Hier musst Du den Term Schritt für Schritt vereinfachen. Und anschließend wird nach x umgestellt.

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgende Rechengesetze:

$\ln(1) = 0$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Wir vereinfachen erst die linke und dann die rechte Seite und vereinfachen am Ende die gesamte Gleichung.

$$\frac{x \cdot \log_2(8) - \sqrt{4x^2}}{2} = \frac{x \cdot 3 - 2x}{2} = \frac{3x - 2x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{\frac{\ln(1) + x}{\sqrt{64} \cdot 2x}} = \sqrt{\frac{0 + x}{8 \cdot 2x}} = \sqrt{\frac{x}{16x}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

Zusammen eingesetzt:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4

Richtige Lösung: c) $\frac{5}{108}$

Erklärung:

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir uns ansehen, wie viele Augenzahl-Paare es gibt, die in der Summe größer als 15 sind und wie viele Augenzahl-Paare es insgesamt geben kann.

Insgesamt kann es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Augenzahl-Paare geben.

Folgende Augenzahl-Paare haben eine Summe über 15:

16: (5,5,6), (6,5,5), (5,6,5), (4,6,6), (6,4,6), (6,6,4)

17: (5,6,6), (6,5,6), (6,6,5)

18: (6,6,6)

Insgesamt also 10 Augenzahl-Paare.

Die Wahrscheinlichkeit für ein solches Augenzahl-Paar beträgt also $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

$\frac{5}{108}$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 5

Richtige Lösung: c) 76 %

Erklärung:

Wir nutzen hier das Gegenereignis und berechnen also die Wahrscheinlichkeit, dass A keinen einzigen Hauptgewinn erhält und ziehen diese Wahrscheinlichkeit dann von 1 ab.

Zuerst berechnen wir die gesamte Anzahl an möglichen Kombinationen von Losen, die A ziehen kann. Dazu nutzen wir die Kombinatorik:

$$\binom{100}{25} = \frac{100!}{25! \cdot (100-25)!} = \frac{100!}{25! \cdot 75!}$$

Wir rechnen das noch nicht aus, sondern verrechnen es davor mit dem anderen Wert, da wir in diesem Schritt vermutlich noch mehr wegkürzen können.

Als nächstes berechnen wir die Anzahl an möglichen Kombinationen von Losen, die A ziehen kann, ohne einen Hauptgewinn zu ziehen. Das bedeutet, er kann seine 25 Lose aus nur insgesamt 95 Losen ziehen.

$$\binom{95}{25} = \frac{95!}{25! \cdot (95-25)!} = \frac{95!}{25! \cdot 70!}$$

Dementsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit keinen einzigen Hauptgewinn zu ziehen:

$$\frac{Kombinationen\ ohne\ Hauptgewinn}{Alle\ möglichen\ Kombinationen} = \frac{\frac{95!}{25! \cdot 70!}}{\frac{100!}{25! \cdot 75!}} = \frac{95!}{25! \cdot 70!} \cdot \frac{25! \cdot 75!}{100!}$$

$$= \frac{95!}{100!} \cdot \frac{25! \cdot 75!}{25! \cdot 70!} = \frac{95!}{100!} \cdot \frac{75!}{70!} = \frac{1}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} \cdot \frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{1}$$

$$= \frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} \approx \frac{75 \cdot 75 \cdot 75 \cdot 75 \cdot 75}{100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81 \cdot 3}{16 \cdot 64} = \frac{243}{1.024} \approx \frac{240}{1.000} \approx 24\%$$

Jetzt müssen wir die Gegenwahrscheinlichkeit noch von 1 abziehen, um die tatsächlich gesuchte Wahrscheinlichkeit zu erhalten:

$$1 - 0{,}24 = 0{,}76 = 76\%$$

Aufgabe 6

Richtige Lösung: d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erklärung:

Schritt 1: E_2 in E_1 einsetzen:

$E_1: 20x + 20y - 50z = -800$ $\quad$ $E_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

$20 \cdot (10 + 30s + 20t) + 20 \cdot (10t) - 50 \cdot (20 - 10s - 10t) = -800$

$200 + 600s + 400t + 200t - 1.000 + 500s + 500t = -800$

$1.100s + 1.100t - 800 = -800$

$1.100s + 1.100t = 0$

$1.100s = -1.100t$

$s = -t$

Schritt 2: Für s in E_2 einsetzen:

Wir wissen, dass $s = -t$ gilt. Da wir nun die Gerade berechnen wollen, setzen wir in E_2 für s ein und erhalten dann eine Gerade, da wir nur einen Parameter darin enthalten haben. Diese vereinfachen wir noch und erhalten dann die Schnittgerade in Parameterform.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + (-t) \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30t \\ 0 \\ 10t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20t \\ 10t \\ -10t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30t + 20t \\ 0 + 10t \\ 10t - 10t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10t \\ 10t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Richtige Lösung: c) $18\ \mathrm{cm}$

Erklärung:

Formel:

$Umfang = 2 \cdot Radius \cdot \pi$

$Fläche = (Radius)^2 \cdot \pi$

Umgestellt: $Radius = \sqrt{\frac{Fläche}{\pi}}$

Eingesetzt: $Umfang = 2 \cdot \sqrt{\frac{Fläche}{\pi}} \cdot \pi = 2 \cdot \sqrt{\frac{Fläche \cdot \pi^2}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{Fläche \cdot \pi}$

$Umfang = 2 \cdot \sqrt{Fläche \cdot \pi} = 2 \cdot \sqrt{25{,}8 \cdot \pi} \approx 2 \cdot \sqrt{81} = 2 \cdot 9 = 18$

18 cm ist die richtige Antwort.

Aufgabe 8

Richtige Lösung: b) $x = 0$

Erklärung:
Um diese Aufgabe lösen zu können, brauchst du folgendes Rechengesetz:

$\ln(e^a) = a$

$f(x) = 0 = \frac{\ln(e^x) \cdot (4x^2 - x^4)}{\sqrt{2x} + e^x + 1}$ → Da nicht durch 0 geteilt werden darf, muss zunächst geprüft werden, wann der Zähler = 0 ist.

$0 = \ln(e^x) \cdot (4x^2 - x^4) = x \cdot (4x^2 - x^4)$

$0 = x \cdot (4x^2 - x^4)$

$x_1 = 0$

$0 = 4x^2 - x^4$

$x^4 = 4x^2$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4} = \pm 2$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

Da im Nenner des Bruchs eine Wurzel ist, ist der Definitionsbereich dieser Funktion auf Werte von $x \geq 0$ beschränkt. Allerdings wird der Nenner nie 0, also ist innerhalb dieses Definitionsbereichs kein weiterer Wert auszuschließen. $x = -2$ ist keine Nullstelle, da die Funktion für die negativen Werte nicht definiert ist.

Die Nullstellen sind also:

$x = 0$

$x = 2$

Aufgabe 9

Richtige Lösung: c) 4

Erklärung:

Zunächst müssen wir die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks herleiten und dann für die Seitenlänge einsetzen.

Grundsätzliche Formel für die Fläche eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot Basis \cdot Höhe$

Höhe eines gleichseitigen Dreiecks (mithilfe des Satz des Pythagoras):

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Formel für die Höhe in die Flächenformel einsetzen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Jetzt setzen wir statt a in die Formel $2a$ für die Seitenlänge ein:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4a^2 = \sqrt{3} \cdot a^2$$

Um den Faktor herauszufinden, setzen wir die beiden Formeln für den Flächeninhalt ins Verhältnis:

$$Faktor = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{a^2} = 4$$

Der Faktor beträgt 4.

Aufgabe 10

Richtige Lösung: b) $t(x) = 6x - 4$

Erklärung:

Um die Tangente herauszufinden, muss zunächst die Steigung ermittelt werden. Diese ergibt sich aus der Ableitung von $f(x)$. Die Ableitung ist $f'(x) = 5x^4 + 1$

Als nächstes muss, ermittelt werden, welche Steigung $f(x)$ konkret im Punkt $(1{,}2)$ hat. Dazu setzen wir den x-Wert in die Ableitung ein. $f'(1) = 5 \cdot (1)^4 + 1 = 6$. Somit beträgt die Steigung 6. Nun setzen wir die Steigung und den Punkt in die übliche Tangentengleichung ($t(x) = mx + b$) ein.

$2 = 6 \cdot 1 + b \quad \rightarrow \quad 2 = 6 + b \quad \rightarrow \quad -4 = b$

Somit ist die fertige Tangentengleichung $t(x) = 6x - 4$.

$t(x) = 6x - 4$ ist die richtige Antwort.

Aufgabe 11

Richtige Lösung: c) 3

Erklärung:

Um diese Aufgaben zu lösen, brauchst Du folgendes Wissen über den Logarithmus:

$$\log\left(a^b\right) = b \cdot \log(a)$$

Und folgendes Potenzgesetz:

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\log_5(25) + \log_5\left(\frac{1}{25}\right) + \log_5(125) = \log_5(25) + \log_5(25^{-1}) + \log_5(125)$$

$$= \log_5(25) - 1 \cdot \log_5(25) + \log_5(125)$$

Den Wert der Logarithmusterme können wir ganz einfach so berechnen:

$= \log_5(25)$: $5^x = 25$ → wir wissen, dass der Exponent 2 ist
$= \log_5(125)$: $5^x = 125$ → wir wissen, dass der Exponent 3 ist

$$\log_5(25) - 1 \cdot \log_5(25) + \log_5(125) = 2 - 1 \cdot 2 + 3 = 3$$

Aufgabe 12

Richtige Lösung: d) 8,5

Erklärung:

Bei dieser Aufgabe muss man in möglichst kurzer Zeit möglichst präzise schätzen, was die richtige Antwort ist. Die Wurzel ohne Taschenrechner zu berechnen ist unrealistisch. Daher müssen wir mithilfe von Annäherungen arbeiten.

Als erstes quadrieren wir 8,5 approximativ. Die Antwortmöglichkeiten sind um diese Zahl herum verteilt, daher gibt es uns ein gutes Bild, in welchem Bereich die gesuchte Zahl liegt. Zahlen, die auf ,5 enden können wir sehr gut approximativ quadrieren, indem wir die nächste ganze Zahl darüber und darunter miteinander multiplizieren.

In diesem Fall: $8 \cdot 9 = 72$. Das Ergebnis ist eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 8,5.

Aufgabe 13

Richtige Lösung: a) $9;\ -1$

Erklärung:

Da nie durch 0 geteilt werden darf, müssen wir herausfinden, für bei welchen x-Werten der Nenner des Bruchs 0 ist. Dazu setzen wir diesen gleich 0 und lösen nach x auf. Dazu muss hier die pq-Formel (alternativ die Mitternachtsformel) angewendet werden.

$2x^2 - 16x - 18 = 0$ → $x^2 - 8x - 9$ → $p = -8$ $q = -9$

$x_{1,2} = -\frac{(-8)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - (-9)}$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 9}$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9}$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{25}$ → $x_1 = 4 + 5 = 9$ $x_2 = 4 - 5 = -1$

9; -1 ist die richtige Antwort.

Aufgabe 14

Richtige Lösung: d) $x = \frac{4y+3}{2y-5}$

Erklärung:

Die Umkehrfunktion zu bilden bedeutet, dass man nach x umstellen muss. Dazu formen wir die Funktion folgendermaßen um:

$y = \frac{5x+3}{2x-4}$ $\quad | \cdot (2x - 4)$

$y \cdot (2x - 4) = 5x + 3$ $\quad |T$

$2xy - 4y = 5x + 3$ $\quad | + 4y$

$2xy = 5x + 4y + 3$ $\quad | - 5x$

$2xy - 5x = 4y + 3$ $\quad |Ausklammern$

$x \cdot (2y - 5) = 4y + 3$ $\quad | \div (2y - 5)$

$x = \frac{4y+3}{2y-5}$

Aufgabe 15

Richtige Lösung: a) 38 %

Erklärung:

Diese Aufgabe dreht sich um bedingte Wahrscheinlichkeit, was man daran erkennen kann, dass sich die Wahrscheinlichkeit für die Genauigkeit des Sensors mit dem Zustand der Maschine ändert.

Wir nennen einen Defekt D und wenn kein Defekt vorliegt, nennen wir es $\overline{D}$.

Wenn der Sensor einen Defekt meldet, nennen wir es P und wenn kein Defekt gemeldet wird, nennen wir es $\overline{P}$.

Gegeben ist folgendes:

$P(P|D) = 0{,}9$

$P(P|\overline{D}) = 0{,}08$

$P(D) = 0{,}05$

$P(\overline{D}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

Wir suchen: $P(D|P)$

Bayes-Regel:

$$P(D|P) = \frac{P(P|D) \cdot P(D)}{P(P)}$$

Um $P(D|P)$ zu berechnen, müssen wir nur noch $P(P)$ herausfinden.

$$P(P) = P(P|D) \cdot P(D) + P(P|\overline{D}) \cdot P(\overline{D})$$

$P(P|D) = 0{,}95$

$P(D) = 0{,}05$

$P(\overline{D}) = 0{,}95$

$P(P|\overline{D}) = 0{,}08$

$$P(P) = 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}08 \cdot 0{,}95 = \frac{90}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{8}{100} \cdot \frac{95}{100} = \frac{450}{10.000} + \frac{760}{10.000}$$

$$P(P) = 0{,}045 + 0{,}076 = 0{,}121$$

Als nächstes setzen wir alle Werte in die Bayes-Formel ein:

$$P(D|P) = \frac{P(P|D) \cdot P(D)}{P(P)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}121} = \frac{0{,}045}{0{,}121} = \frac{45}{121}$$

$$P(F|P) = \frac{45}{121} = \frac{45 \cdot \frac{5}{6}}{121 \cdot \frac{5}{6}} \approx \frac{37{,}5}{100} \approx 38\%$$

Aufgabe 16

Richtige Lösung: a) $(-5{,}0{,}2)$

Erklärung:

Wenn wir den Schnittpunkt einer Gerade und einer Ebene berechnen müssen, wobei beide in der Parameterform gegeben sind, formen wir die Ebene zuerst in die Koordinatenform um, um dann die Gerade in Parameterform in die Koordinatenform der Ebene einzusetzen. Anschließend müssen wir noch nach dem Parameter der Geraden auflösen und diesen in die Gerade einsetzen um final den Schnittpunkt zu ermitteln.

Schritt 1: Ebene in Koordinatenform bringen:
Um eine Ebene von der Parameterform in die Koordinatenform zu bringen, müssen wir zunächst anhand des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren den Normalenvektor der Ebene bilden. Haben wir diesen ermittelt, setzen wir in die Koordinatenform mit den Werten des Normalenvektors den Punkt des Stützvektors ein, um den Wert auf der rechten Seite der Gleichung zu ermitteln.

$$E_1: \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 3 - (-2) \\ -6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform aufstellen und Stützvektor einsetzen:

$$-3x + 5y - 6z = ?$$

$$-3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot (-1) = -3 - (-6) = -3 + 6 = 3$$

Koordinatenform:

$-3x + 5y - 6z = 3$

Schritt 2: Gerade in Koordinatenform der Ebene einsetzen und nach Parameter auflösen:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -26 \\ 16 \\ -6 \end{pmatrix}$

$-3x + 5y - 6z = 3$

Eingesetzt:

$-3 \cdot (-18 - 26r) + 5 \cdot (8 + 16r) - 6 \cdot (-1 - 6r) = 3$

$54 + 78r + 40 + 80r + 6 + 36r = 3$

$194r + 100 = 3$

$194r = -97$

$r = \frac{-97}{194} = -\frac{1}{2}$

Schritt 3: Parameter-Wert in Gerade einsetzen und Punkt ermitteln:

$\begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -26 \\ 16 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die richtige Antwort ist $(-5{,}0{,}2)$

Aufgabe 17

Richtige Lösung: d) 40 %

Erklärung:

Die Dichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit einer Variable an, wobei es sich um eine stetige Variable handelt. Daher ist die Dichtefunktion integrierbar.

Wir wollen die gesamte Anzahl an Besuchern, die in einem bestimmten Zeitraum den Zirkus besucht haben anhand dieser Dichtefunktion berechnen. Dazu bilden wir das Integral, welches die sogenannte Verteilungsfunktion darstellt.

$f(x) = \begin{cases} -0{,}3x^2 + 4x + 1 & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & sonst \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} -0{,}1x^3 + 2x^2 + x & 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & sonst \end{cases}$

Wir wollen wissen, wie viel Prozent der gesamten Besucheranzahl an den letzten beiden Tagen anfällt. Dazu müssen wir zunächst die Besucheranzahl über den gesamten Zeitraum und einmal die Besucheranzahl an den letzten beiden Tagen berechnen, um diese anschließend ins Verhältnis setzen zu können.

Die Dichtefunktion beschreibt die Anzahl der Besucher über die 7 Tage hinweg und daher ist die Funktion auf $0 \leq x \leq 7$ beschränkt.

Um die Besucherzahl über den gesamten Zeitraum zu berechnen, setzen wir die beiden Beschränkungen der Funktion $x = 0$ und $x = 7$ als Integrationsgrenzen ein.

$$\int_0^7 (-0{,}3x^2 + 4x + 1)dx = [-0{,}1x^3 + 2x^2 + x]_0^7$$

$$= (-0{,}1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 7) - (-0{,}1 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 0)$$

$$= (-0{,}1 \cdot 343 + 2 \cdot 49 + 7) - (-0 + 0 + 0)$$

$$= (-34{,}3 + 98 + 7) = 70{,}7$$

Als nächstes müssen wir die Anzahl der Zirkusbesuchern an den letzten beiden Tagen berechnen. Dazu setzen wir $x = 5$ und $x = 7$ als Integrationsgrenzen ein.

$$\int_5^7 (-0{,}3x^2 + 4x + 1)dx = [-0{,}1x^3 + 2x^2 + x]_5^7$$

$$= (-0{,}1 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 7) - (-0{,}1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 5)$$

$$= (-0{,}1 \cdot 343 + 2 \cdot 49 + 7) - (-0{,}1 \cdot 125 + 2 \cdot 25 + 5)$$

$$= (-34{,}3 + 98 + 7) - (-12{,}5 + 50 + 5) = 70{,}7 - 42{,}5 = 28{,}2$$

Zuletzt müssen wir die beiden Zahlen ins Verhältnis setzen.

$$\frac{28{,}2}{70{,}7}$$

Um hier eine Schätzung einer Prozentzahl anzustellen können wir beide Zahlen (Zähler und Nenner) mal 1,5 multiplizieren. Denn, wenn wir eine Prozentzahl bei einem Bruch schätzen wollen ist der direkteste Weg den Nenner so nah wie möglich an 100 zu bringen.

$$\frac{28{,}2 \div 7}{70{,}7 \div 7} \approx \frac{4}{10}$$

$$\frac{4 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{40}{100} = 40\ \%$$

Die richtige Lösung ist 40 %.

Aufgabe 18

Richtige Lösung: c) Graph C

Erklärung:

Diese Aufgabe mag einen erstmal etwas überfordern, umso wichtiger ist es jedoch Ruhe zu bewahren und die Graphen einzeln durchzugehen. Hat man einen Graphen analysiert, kann man in der Regel schnell die ersten 2 Antwortmöglichkeiten ausschließen und hat es schon viel leichter.

Die drei Funktionen sind alle quadratische Funktionen 3. Grades, was so viel heißt, wie dass der höchste Exponent 3 ist. Die Form die sich dabei üblicherweise ergibt nennt man kubische Funktion.

Die ist dadurch gekennzeichnet, dass sie wie ein gedrehtes S aussieht und ein Ende in den negativen und ein Ende in den positiven Bereich verläuft. Des weiteren hat dieser Graph immer entweder einen Wendepunkt oder einen Sattelpunkt.

Um ausfindig zu machen, welcher Graph zu welcher Funktion gehört, müssen wir hier prüfen, ob die Potenz ein positives oder ein negatives Vorzeichen hat und ggf. noch, welche Steigung die Funktion im Wendepunkt bzw. Sattelpunkt hat.

Wir schauen uns zuerst $h(x) = 0{,}2x^3$ an.
Die Potenz hat ein positives Vorzeichen, was bedeutet, dass der Graph bei positiven x-Werten immer weiter ins Positive geht und bei negativen x-Werten immer weiter ins Negative.
Somit können wir schon Antwortmöglichkeit b) und d) ausschließen.

Als nächstes schauen wir uns $f(x)$ und $g(x)$ an. Diese beiden Funktionen sind an der X-Achse gespiegelt. Daher können wir uns nur eine angucken, da sie beide die selben Erkenntnisse bieten.

$f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x$

Wir sehen, dass die höchste Potenz ein positives Vorzeichen hat und somit, wie auch bei $h(x)$ gilt, dass der Graph bei positiven x-Werten immer weiter ins Positive geht und bei negativen x-Werten immer weiter ins Negative.
Somit können wir auch Antwortmöglichkeit a) ausschließen.

Graph C ist die richtige Antwort.

Aufgabe 19

Richtige Lösung: c) 36 %

Erklärung:

Gegeben: $P(Wochenendtag) = \frac{2}{7}$

$P(Feiertag) = \frac{1}{10}$

Gesucht: $P(Wochenendtag \cup Feiertag)$

($Wochenendtag \cup Feiertag$ bedeutet Wochenendtag oder Feiertag)

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass entweder ein Wochenendtag oder ein Feiertag vorliegt, weil sich diese Ereignisse auch überlappen könnten (Feiertag am Wochenende). Die Wahrscheinlichkeit für solche Ereignisse berechnet man folgendermaßen:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Wir haben $P(Wochenendtag)$ und $P(Feiertag)$ gegeben, benötigen aber noch $P(Wochenendtag \cap Feiertag)$, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

($Wochenendtag \cap Feiertag$ bedeutet Wochentag und Feiertag)

Bei unabhängigen Ereignissen, wie diesen bei Wochenend- und Feiertagen gilt:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Demnach berechnen wir:

$$P(Wochenendtag \cap Feiertag) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{70}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(Wochenendtag \cup Feiertag) = \frac{2}{7} + \frac{1}{10} - \frac{2}{70} = \frac{20}{70} + \frac{7}{70} - \frac{2}{70} = \frac{20 + 7 - 2}{70} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$

Um eine Prozentzahl zu schätzen wollen wir den Nenner so nah wie möglich an 100 bringen. Dazu multiplizieren wir hier den Bruch mit 7, denn $14 \cdot 7 = 98$.

$$\frac{5}{14} \cdot 7 = \frac{35}{98} \approx \frac{36}{100} \rightarrow 36\%$$

Ungefähr 36 % der Tage in Bapsymanien sind freie Tage.

Aufgabe 20

Richtige Lösung: d) 7,1

Erklärung:

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streubreite eines Wertes um den Durchschnitt herum. Während die Varianz die quadrierte Streuung von Werten um den Durchschnitt herum berechnet, berechnet man mit der Standardabweichung die einfache Streuung. Daher ziehen wir die Wurzel der Varianz, um die Standardabweichung zu berechnen. Um die Varianz zu berechnen nutzen wir folgende Formel:

$$Var(x) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

Und die Formel zur Berechnung der Standardabweichung ist demnach:

$$Std(x) = \sqrt{Var(x)}$$

Schritt 1: Mittelwert berechnen:

$$\bar{x} = \frac{120+135+115+125+130}{5} = \frac{625}{5} = 125$$

Schritt 2: Varianz berechnen:

$$Var(x) = \frac{(120-125)^2+(135-125)^2+(115-125)^2+(125-125)^2+(130-125)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{(-5)^2+(10)^2+(-10)^2+(0)^2+(5)^2}{5}$$

$$Var(x) = \frac{25+100+100+25}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

Schritt 3: Standardabweichung berechnen:
$Std(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{50}$

Wir wissen:
$\sqrt{49} = 7$

Somit können wir gut approximieren: $Std(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{50} \approx 7{,}1$